Problema 70

Propuesto como problema 4 en los exámenes para el acceso al Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria en Castilla y León, julio 2004.

Tres personas, A, B, C lanzan sucesivamente, en ese orden, un dado. La primera persona que saque un 6, gana.

a) ¿Cuáles son sus respectivas probabilidades de ganar?
b) Calcular la probabilidad de que el juego termine en el décimo lanzamiento y de que la persona C saque siempre la suma de lo que acaban de sacar los jugadores A y B en las tiradas inmediatamente anteriores.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

a) Si A no gana en la primera tirada (probabilidad 5/6), entonces las probabilidades de ganar de B, C y A son iguales que las probabilidades de ganar de A, B y C, respectivamente, antes de la primera tirada de A. De igual forma, si ni A ni B ganan en su primera tirada (probabilidad 25/36), las probabilidades de ganar de C, A y B son iguales que las probabilidades de ganar de A, B y C, respectivamente, antes de la primera tirada de A. Por lo tanto, se tiene que la probabilidad de ganar de B es 5/6 de la probabilidad de ganar de A, y la probabilidad de ganar de C es 25/36 de la probabilidad de ganar de A. Como las tres probabilidades deben sumar 1, se tiene que $(1+5/6+25/36)P_A=1$, donde P_A es la probabilidad de que A gane. Se tiene entonces que $P_A=36/91$, y consecuentemente que $P_B=30/91$, $P_C=25/91$.

Este mismo resultado se puede también probar de otra manera alternativa, más "aburrida", que consiste en calcular que la probabilidad de que A gane en su n-ésima tirada es igual a $(1/6)(5/6)^{3(n-1)}$, es decir, la probabilidad de que A saque un 6 después de que durante $n-1$ ciclos consecutivos nadie haya sacado un 6. La suma de la progresión geométrica resultante para $n=1,2,3,...$, produce el mismo resultado que el método anterior. Las probabilidades de ganar de B y C se calculan igualmente de forma análoga, con factores adicionales respectivos 5/6 y 25/36 para tener en cuenta que para que B gane en su n-ésima tirada, A no puede haber sacado un 6 en su n-ésima tirada, y para que gane C, ni A ni B pueden haberlo hecho.

b) El décimo lanzamiento corresponde al cuarto lanzamiento de A. Debemos entonces calcular la probabilidad de que, en tres rondas consecutivas, C obtenga (sin ganar) la suma de lo que obtengan A y B, y de que en su cuarto lanzamiento A gane. Calculemos entonces primero la probabilidad de que en una ronda cualquiera C obtenga la suma de lo que obtienen A y B sin ganar, es decir, sin sacar 6. La suma de lo que obtienen A y B debe estar entonces comprendida entre 2 y 5, pudiendo obtenerse 2 de una única manera (1 y 1), 3 de dos maneras (1 y 2, 2 y 1), 4 de tres (1 y 3, 2 y 2, 3 y 1) y 5 de cuatro (1 y 4, 2 y 3, 3 y 2, 4 y 1), sobre un total de 36 posibles resultados para el lanzamiento conjunto de A y B. Por lo tanto, la probabilidad de que C, sin ganar, saque la suma de lo que han sacado A y B es igual a $(1+2+3+4)/6^3=5/108$. Como esto se debe repetir en tres rondas, seguido de que A saque un 6, la probabilidad pedida es $(5/108)^3/6=5/(2^7 3^{10})$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI