ALGUNAS APLICACIONES DE LA NOCIÓN DE ÁREA : EL TRIÁNGULO DE ROUTH Y LOS TRIÁNGULOS CEVIANOS

FRANCISCO BELLOT ROSADO

Representante para Europa Occidental de la Federación Mundial de Competiciones Matemáticas Nacionales (*WFNMC*)

En 1891, Edward John Routh, en *A treatise on Analytical Statics, with numerous examples, vol.*1, *Cambridge U.Press*, *p.*82, enunció sin demostración el teorema siguiente :

Sean AA’,BB’,CC’ tres cevianas arbitrarias (no necesariamente concurrentes) del triángulo ABC, que se cortan dos a dos formando el triángulo A”B”C” (A” = BB’ ∩ CC’, etc.). Si se verifican las relaciones

$$\alpha = \frac{BA'}{A'C}, \quad \beta = \frac{CB'}{B'A}, \quad \gamma = \frac{AC'}{C'B}$$

entonces, siendo S y S” las áreas de los triángulos ABC y A”B”C”, respectivamente, se tiene

$$S'' = S\frac{(1-\alpha\beta\gamma)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)} \qquad (1).$$

Habitualmente, este resultado se conoce como teorema de Routh, y ha sido estudiado extensamente. La demostración que presentamos, completamente elemental, se debe al gran matemático rumano Trajan Lalescu, publicada en 1900 en la centenaria revista *Gazeta Matematica*, como generalización de un problema propuesto en el que se pedía tal área cuando una de las cevianas es la altura AA’, otra la mediana BB’ y la tercera la bisectriz interior CC’.

Con la notación $[PQR]$ para el área del triángulo PQR, se tiene primero que

$$S'' = S - [AC''B] - [BA''C] - [CB''A],$$

y por otra parte

$$S = [AC''B] + [BC''C] + [CC''A].$$

Los triángulos BC”C y AC”B tienen en común la base BC”; por lo tanto sus áreas están en la razón de las alturas desde C y A sobre BC”. Esta razón es β, por la semejanza de los triángulos rectángulos formados por las dos alturas trazadas sobre BC” por CB’ y AB’ (hipotenusas). Así se obtiene

$$S = [AC''B]\left(1+\beta+\frac{1}{\alpha}\right) \Rightarrow [AC''B] = \frac{\alpha S}{1+\alpha+\alpha\beta}.$$

Análogamente se obtienen $[BA''C]$ y $[CB''A]$. Finalmente,

$$S'' = S\left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha\beta} - \frac{\beta}{1+\beta+\beta\gamma} - \frac{\gamma}{1+\gamma+\gamma\alpha}\right)$$
$$= S\frac{(1-\alpha\beta\gamma)^2}{(1+\alpha+\alpha\beta)(1+\beta+\beta\gamma)(1+\gamma+\gamma\alpha)}.$$

S” es nula si $\alpha\beta\gamma = 1,$ que es el teorema de Ceva. En el caso del problema publicado en la revista rumana, se tiene

$$\alpha = \frac{c.\cos B}{b.\cos C}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{b}{a},$$

de manera que la condición de concurrencia de estas tres cevianas particulares se expresa mediante

$$senA = \cos B.\tan C.$$

(Éste fué, mucho más tarde, un problema de la Olimpiada Búlgara).

En la revista belga *Mathesis*, hoy desaparecida, el gran geómetra francés Victor Thébault publicó en 1958 una extensa recopilación de resultados relativos a casos especiales del teorema de Routh para el triángulo y para el tetraedro. En ella (titulada *Alturas, medianas, simedianas, bisectrices de un triángulo*), además de la fórmula de Routh, se menciona otra similar, para el área del triángulo ceviano A'B'C' (que también cita Routh en su libro):

Si ponemos

$$\alpha = \frac{l}{l_1},\ \ \beta = \frac{m}{m_1},\ \ \gamma = \frac{n}{n_1},$$

entonces

$$S' = [A'B'C'] = S\frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)},$$

y cita como fuente para ambas fórmulas dos revistas francesas : para esta última fórmula, *Nouvels Annals de Mathématiques*,1881, *p*.182, *question* 1353, propuesta por Genty y con solución de J.B.Delacourcelle, *enfant de troupe du* 53^e de ligne, en Tarbes; para la fórmula de Routh menciona una fuente inaccesible para mí: el *Journal de Vuibert*, *año* 38, *p*.96, *question* 7921.

La demostración de esta segunda fórmula es igualmente elemental:

$$\begin{aligned}[A'B'C'] &= S - [AB'C'] - [BA'C'] - [CA'B'] \\ &= S\left(1 - \frac{[AB'C']}{S} - \frac{[BA'C']}{S} - \frac{[CA'B']}{S}\right),\end{aligned}$$

y, puesto que se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{[AB'C']}{S} &= \frac{AB'.AC'}{AC.BA} = \frac{m_1n}{(m+m_1)(n+n_1)} \\ \frac{[BA'C']}{S} &= \frac{BA'.BC'}{BC.BA} = \frac{n_1l}{(l+l_1)(n+n_1)} \\ \frac{[CA'B']}{S} &= \frac{CA'.CB'}{CB.CA} = \frac{l_1m}{(l+l_1)(m+m_1)},\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}[A'B'C'] &= S\left(1 - \frac{m_1n}{(m+m_1)(n+n_1)} - \frac{n_1l}{(l+l_1)(n+n_1)} - \frac{l_1m}{(l+l_1)(m+m_1)}\right) \\ &= S\frac{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1) - m_1n(l+l_1) - n_1l(m+m_1) - l_1m(n+n_1)}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)} \\ &= S\frac{lmn + l_1m_1n_1}{(l+l_1)(m+m_1)(n+n_1)}.\end{aligned}$$

En el caso especial en que

$$l = m = n \quad \text{y}\ l_1 = m_1 = n_1$$

los cocientes entre áreas valen

$$\frac{S'}{S} = \frac{l^2 - ll_1 + l_1^2}{(l+l_1)^2},\quad \frac{S''}{S} = \frac{(l-l_1)^2}{l^2 + ll_1 + l_1^2}.$$

Especializando las cevianas AA’,BB’ y CC’ se pueden obtener algunos casos particulares interesantes :

1: *AA’ altura*; *BB’ bisectriz interior*; *CC’ mediana*

Entonces

$$\frac{S'}{S} = \frac{c(a\cos B + b\cos C)}{2a(c+a)}; \quad \frac{S''}{S} = \frac{c(a\cos B - b\cos C)^2}{a(2a+c)(a+b\cos C)(1+\cos B)}$$

2: *AA’ altura*, *BB’ bisectriz exterior*, *CC’ mediana*

En este caso

$$\frac{S'}{S} = \frac{c(a\cos B - b\cos C)}{2a(c-a)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{c(a\cos B + b\cos C)^2}{a(2a-c)(a+b\cos C)(1-\cos B)}$$

De estas cuatro expresiones, utilizando las identidades

$$2S^2(1+\cos B) = c.a.r.r_b, \quad 2S^2(1-\cos B) = c.a.r_c.r_a$$

resulta, dividiendo miembro a miembro

$$\frac{S'}{S''} = \frac{(a\cos B + b\cos C)(2a+c)(a+b\cos C)carr_b}{4S^2(c+a)(a\cos B - b\cos C)^2}$$

y análogamente en el otro caso.

3: *AA’ altura*, *BB’ bisectriz interior*, *CC’ simediana*

$$\frac{S'}{S} = \frac{bc(b\cos B + a\cos C)}{(c+a)(a^2+b^2)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{bc(b\cos B - a\cos C)^2}{a(b^2+ca+a^2)(b+a\cos C)(1+\cos B)}$$

4: *AA’ altura*, *BB’ bisectriz exterior*, *CC’ simediana*

$$\frac{S'}{S} = \frac{bc(b\cos B - a\cos C)}{(c-a)(a^2+b^2)}, \quad \frac{S''}{S} = \frac{bc(b\cos B + a\cos C)^2}{a(b^2-ca+a^2)(b+a\cos C)(1-\cos B)}$$

De las fórmulas anteriores se deducen las caracterizaciones siguientes para algunos triángulos especiales :

$$\begin{aligned}
a + b\cos C = 0 &\iff \text{altura AA' y mediana CC' paralelas}\\
b + a\cos C = 0 &\iff \text{altura AA' y simediana CC' paralelas}\\
a\cos B + b\cos C = 0 &\iff \text{A',C',B' alineados}\\
a\cos B - b\cos C = 0 &\iff \text{AA',BB',CC' concurrentes}\\
b\cos B - a\cos C = 0 &\iff A', B', C' \text{ alineados}
\end{aligned}$$

En el caso en que las tres cevianas AA’,BB’,CC’ sean concurrentes en el punto P, el teorema de Ceva en la forma $\alpha\beta\gamma = 1$ permite escribir la tercera razón en función de las otras dos.

Si ponemos

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{z}{y}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{x}{z}, \text{ entonces } \frac{AC'}{C'B} = \frac{y}{x}.$$

Las relaciones entre P,A’,B’,C’ están dadas por la fórmula de Van Aubel:

$$\frac{AP}{PA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{y+z}{x},$$

y análogamente en los demás casos, de donde se pueden obtener los resultados clásicos de Euler y Gergonne :

$$\frac{PA'}{AA'} + \frac{PB'}{BB'} + \frac{PC'}{CC'} = 1,$$
$$\frac{AP}{AA'} + \frac{BP}{BB'} + \frac{CP}{CC'} = 2.$$

El teorema de Stewart permite calcular las longitudes de las cevianas. Si A’ está en el lado BC, se tiene, por ejemplo,

$$\overline{AA'}^2 = \frac{BA'}{BC} \cdot \overline{AC}^2 + \frac{A'C}{BC} \cdot \overline{AB}^2 - \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{A'C}{BC} \cdot \overline{BC}^2,$$

es decir

$$\overline{AA'}^2 = \frac{y}{y+z}b^2 + \frac{z}{y+z}c^2 - \frac{yz}{(y+z)^2}a^2,$$

y análogamente los otros casos. También se observa que

$$AP = \frac{y+z}{x+y+z}AA' = \frac{1}{x+y+z}\sqrt{z(y+z)b^2 + y(y+z)c^2 - yza^2},$$

etc. También el teorema de Stewart permite calcular los lados del triángulo ceviano : para hallar A’B’ lo aplicaremos al triángulo ACA’, con B’ en el lado AC :

$$\overline{A'B'}^2 = \frac{yz(z-x)a^2}{(z+x)(y+z)^2} + \frac{zx(x-y)b^2}{(z+x)^2(y+z)} + \frac{xyc^2}{(x+y)(y+z)},$$

etc.

La fórmula para el área del triángulo ceviano, particularizada en este caso de cevianas concurrentes, da

$$[A'B'C'] = \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}S.$$

Se pueden estudiar algunas propiedades extremales de los triángulos cevianos. Es sabido que el de perímetro mínimo es el triángulo órtico, formado por los pies de las alturas. Por lo que se refiere a las áreas, de la fórmula anterior y la desigualdad de las medias, escrita en la forma

$$x + y \geq 2\sqrt{xy},$$

resulta

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz,$$

así que

$$[A'B'C'] \leq \frac{1}{4}S,$$

y la igualdad se alcanza cuando $x = y = z,$ en cuyo caso P es el baricentro del triángulo, y el triángulo ceviano es el triángulo medial.

Para terminar, antes de concluir con una colección de problemas propuestos, resumimos algunos valores particulares del área y los perímetros de algunos triángulos cevianos. L es el punto de Lemoine (intersección de las simedianas), J el de Gergonne (intersección de las cevianas que unen cada vértice con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el lado opuesto) y N el de Nagel (intersección de las cevianas que unen cada vértice con el punto de tangencia de la circunferencia exinscrita en el lado opuesto) :

Punto P	*Perímetro*	*Área*
G	s	$S/4$
H	$2S/R \leq s$	$2S\cos A\cos B\cos C$
O		$\frac{2S\cos A\cos B\cos C}{\cos(A-B)\cos(B-C)\cos(C-A)}$
I		$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$
L		$\frac{2a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$
J	$2r\left(\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$	$rS/2R$
N		$rS/2R$

Bibliografía

Además de la que ha sido citada en el artículo :

Proyecciones de puntos notables del triángulo según las cevianas respectivas, artículo de Hristo Lesov en *Matematyka* & *Informatika*, 1994/5 (en búlgaro).

Selección de problemas propuestos

1. Las bisectrices del triángulo ABC cortan a los lados opuestos en P,Q,R. Demostrar que el perímetro de PQR es, a lo sumo, el semiperímetro de ABC (*Kömal*, 1994 *Hungría*)

2. ¿Existe un cuadrilátero convexo dividido por sus diagonales en cuatro triángulos de áreas 1, 2, 3 y 4, respectivamente? (*Kömal*)

3. En el triángulo ABC, se consideran

$$A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB,$$

tales que

$$[AB_1C_1] = [BC_1A_1] = [CA_1B_1] = [A_1B_1C_1].$$

Probar que $A_1B_1C_1$ es el triángulo medial de ABC .(*Kömal*)

4. Dado un cuadrilátero ABCD, los puntos de trisección de AB y AD más próximos a A son K y L; los puntos de trisección de CB y CD más próximos a C son N y M. Hallar las razón de las áreas de ABCD y KLMN (*Kömal*).

5. Sean A',B',C' los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados de ABC y sea J el punto de Gergonne. Probar que

$$\frac{[ABC]}{[JBC]} + \frac{[ABC]}{[JAC]} + \frac{[ABC]}{[JAB]} = \frac{r_a + r_b + r_c}{r}.$$

(*Gazeta Matematica* 1963,*Rumania*)

6. Sean AA',BB',CC' tres cevianas concurrentes en P. Si

$$\frac{A'P}{PA} = x, \frac{B'P}{PB} = y, \frac{C'P}{PC} = z,$$

demostrar que

$$2xyz + yz + zx + xy = 1.$$

(*Gazeta Matematica* 1963).

7. Probar que, si L es el punto de Lemoine,

$$\frac{[GIL]}{[ABC]} = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}.$$

(*Mathesis* 1925, *Bélgica*)

8. Sea ABC un triángulo, y $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$. Las semirrectas AA_1, BB_1, CC_1 cortan al círculo circunscrito a ABC en A_2, B_2 y $C_2,$ respectivamente. Demostrar que, si la suma

$$\frac{AA_1}{A_1A_2} + \frac{BB_1}{B_1B_2} + \frac{CC_1}{C_1C_2}$$

es mínima, entonces las rectas AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes.

(*Gazeta Matematica* 1990)

9. Las distancias de un punto interior P a los lados de un triángulo ABC son p_a, p_b, p_c. Demostrar que

$$h_a h_b h_c \geq 27 p_a p_b p_c.$$

(*Kömal*)

10.Sea P un punto interior al triángulo ABC, y sean $x.y,z$ sus distancias a los vértices, y p,q,r sus distancias a los lados BC,CA y AB, respectivamente. Probar que

$$xyz \geq 8pqr.$$

(*Matematyka* & *Informatika* 1990, *Bulgaria*).

11.Sea P un punto interior al triángulo ABC, y sean x,y,z sus distancias a los lados BC,CA y AB, respectivamente. Hallar las posiciones de P para las cuales

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

es mínima (*Kömal*).

12. Sean A_1, B_1, C_1 puntos en los lados del triángulo ABC tales que

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda;$$

y sean A_2, B_2, C_2 puntos en los lados de $A_1B_1C_1$ tales que

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} = \frac{B_1A_2}{A_2C_1} = \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \lambda.$$

Calcular el valor de λ para el cual

$$[A_2B_2C_2] = \frac{1}{2}[ABC].$$

(*Kömal*)

13. Las bisectrices de los ángulos del triángulo ABC cortan a los lados opuestos en P,Q,R. Demostrar que

$$[PQR] \leq \frac{[ABC]}{4}.$$

(*Kömal*)

14. Los puntos de tangencia del círculo inscrito en un triángulo con los lados definen un nuevo triángulo. Determinar su área en función de los lados del triángulo original (*Kömal*).

15. El área del triángulo formado por los puntos medios de tres cevianas (no necesariamente concurrentes) trazadas desde los tres vértices del triángulo ABC es 1/4 del área del triángulo determinado por los pies de las cevianas (Van Aubel ; *American Mathematical Monthly* 1957).

16. En los lados del triángulo ABC se toman puntos $M \in AB,\ N \in BC, P \in CA$ tales que $[AMP] = [BMN] = [NPC]$.

Si

$$\frac{MA}{MB} = k_1, \frac{NB}{NC} = k_2, \frac{PC}{PA} = k_3,$$

entonces

$$k_1(1+k_2) = k_2(1+k_3) = k_3(1+k_1).$$

17. En 1956, DeBrunner probó el siguiente resultado de Erdös :
Si los puntos $B_1 \in A_2A_3, B_2 \in A_3A_1, B_3 \in A_1A_2$ están en los lados del triángulo $A_1A_2A_3$, y S_1, S_2, S_3 son las áreas de $A_1B_2B_3$, etc, entonces se verifica

$$S = [ABC] \geq \min\{S_1, S_2, S_3\}.$$

Demostrar la siguiente extensión de la desigualdad de Erdös-DeBrunner :

$$S \geq \left(\frac{S_1^\alpha + S_2^\alpha + S_3^\alpha}{3}\right)^{1/\alpha}, \text{ con } \alpha \leq 1.$$

¿Es cierta la desigualdad cuando $\alpha > 1$? (*Matematyka* & *Informatika* 1989).
18. Sean A',B',C' los pies de las bisectrices interiores de ABC, y sean A'', B'', C'' los puntos simétricos de A',B',C' respecto de los vértices de ABC. Calcular

$$\frac{[A''B''C'']}{[ABC]}$$

en función de los lados de ABC (*Mathesis* 1894).
19. En el triángulo $A_1A_2A_3$, de perímetro 2s, se considera el punto P. Las cevianas A_iP cortan a los lados opuestos en P_i. Demostrar que

$$A_1P_1 \cdot A_2P_2 \cdot A_3P_3 \geq 4s[P_1P_2P_3].$$

(*Nieuw Archieff voor Wiskunde*, 1965, *Holanda*; *propuesto por Oene Bottema*).
20. En un triángulo ABC, sean : A_1, B_1, C_1, H los pies de las alturas y el ortocentro, respectivamente; A_2, B_2, C_2 los pies de las medianas; A_3, B_3, C_3 los puntos medios respectivos de AH,BH y CH. Si S es el área del triángulo, y S_1, S_2, S_3 las áreas de los cuadriláteros $A_2B_1A_3C_1$, $B_2C_1B_3A_1$, $C_2A_1C_3B_1$, respectivamente, demostrar que

$$S = S_1 + S_2 + S_3.$$

(*Gazeta matematica* 1963).
21. Se dividen los lados BC,CA y AB del triángulo ABC por los puntos A',B',C' en una misma razón, p/q; sean A",B",C" los segundos puntos de intersección de las rectas AA',BB',CC' con el círculo circunscrito a ABC. Hallar, en función de los elementos de ABC, de p y de q :
a) las longitudes de AA",BB" y CC"
b) las longitudes de B"C",C"A" y A"B".
(*Mathesis* 1894; *propuesto por Joseph Neuberg*)
22. En los lados AB y CD del cuadrilátero convexo ABCD se toman los puntos K y M, respectivamente. Sean

$$L = AM \cap KD, \quad N = KC \cap BM.$$

a) Demostrar que si K y M son los puntos medios de AB y CD, entonces

$$[KLMN] \leq \frac{[ABCD]}{3}.$$

b) Demostrar que, si $\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MD} = \frac{m}{n}$, entonces

$$[KLMN] < \frac{mn}{m^2+mn+n^2} < [ABCD].$$

(*Olimpiada URSS* 1989; *propuesto por Dmitri Tereshin*).

23. Se da el tetraedro ABCD y su punto interior I. Las rectas AI, BI, CI, DI cortan a las caras opuestas en A’,B’,C’,D’, respectivamente. Se consideran los puntos $A_1 \in A'I, B_1 \in B'I, C_1 \in C'I, D_1 \in D'I$ tales que

$$\frac{IA_1}{A_1A'} = \frac{IB_1}{B_1B'} = \frac{IC_1}{C_1C'} = \frac{ID_1}{D_1D'} = k.$$

Demostrar que

$$\frac{AA_1}{A_1A'} + \frac{BB_1}{B_1B'} + \frac{CC_1}{C_1C'} + \frac{DD_1}{D_1D'} \geq 4(4k+3);$$

$$\frac{A_1A'}{AA_1} + \frac{B_1B'}{BB_1} + \frac{C_1C'}{CC_1} + \frac{D_1D'}{DD_1} \geq \frac{4}{4k+3}.$$

(*Gazeta Matematica*, 1966).

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI