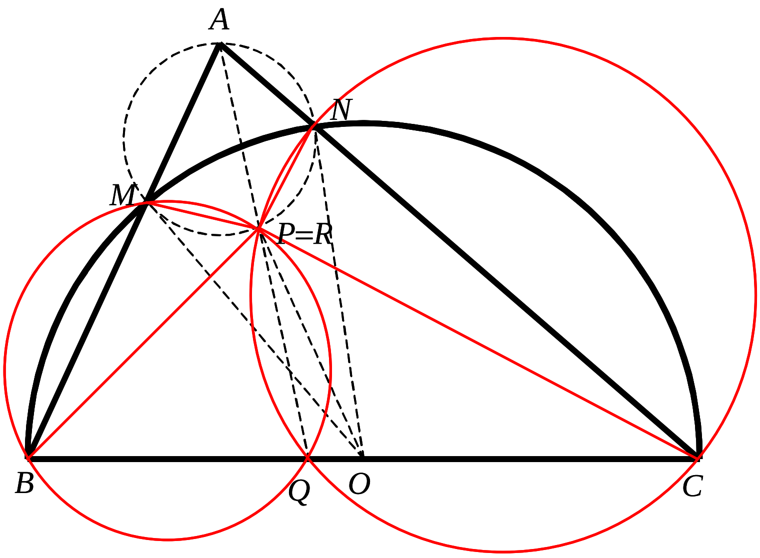
IMO 2004 Problema 1

Sea ABC un triángulo acutángulo con AB distinto de AC. El círculo con diámetro BC corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sea O el punto medio del lado BC. Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se cortan en R. Prueba que las circunferencias circunscritas de los triángulos BMR y CNR tienen un punto común sobre el lado BC.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sea P el segundo punto donde la bisectriz de $\angle A$ corta a la circunferencia circunscrita a AMN, y Q el punto donde dicha bisectriz corta al lado BC. Demostraremos que P y R coinciden, y que $BMRQ$ y $CNRQ$ son cíclicos.

Como $\angle MAP=\angle NAP=\angle A/2$, y P está en el arco MN de la circunferencia circunscrita al triángulo MAN que no contiene a A, se tiene que $MP=NP$, luego P está también el la mediatriz de MN. Pero la mediatriz de MN es también la bisectriz de $\angle MON$, al ser $OM=ON=BC/2$ igual al radio de la circunferencia de diámetro BC. Luego en P coinciden las bisectrices de $\angle MAN$, que es la bisectriz de $\angle BAC$, y la bisectriz de $\angle MON$. Por lo tanto, P coincide con R.

Por ser además $MR=NR$, se deduce inmediatamente del anterior resultado que $\angle MNR=\angle NMR=\angle MAR=\angle NAR=\angle A/2$. Además, es obvio que al ser BC un diámetro de la circunferencia que pasa por M y N, entonces $\angle BMC=\angle BNC=p/2$, es decir, M y N son los pies respectivos de las alturas desde C y B a los lados AB y AC del triángulo ABC.

Es entonces obvio (y conocido) que el triángulo ANM es semejante al triángulo ABC, por ser $\angle MAN=\angle BAC$, siendo $AN/AB=AM/AC=\cos(\angle A)$. Por lo tanto, se tiene que $\angle ANR=\angle ANM+\angle MNR=\angle B+\angle A/2$; análogamente, $\angle AMR=\angle AMN+\angle NMR=\angle C+\angle A/2$. Por lo tanto, $\angle RMB=p-\angle AMR=\angle B+\angle A/2$, y $\angle RNC=p-\angle ANR=\angle C+\angle A/2$.

Además, $p-\angle RQC=\angle RQB=\angle AQB=p-\angle QAB-\angle ABQ=p-\angle A/2-\angle B=\angle C+\angle A/2$, con lo que $\angle RQC+\angle CNR=\angle RQB+\angle BMR=p$, y los cuadriláteros $BMRQ$ y $CNRQ$ son cíclicos. Luego las circunferencias circunscritas a los triángulos BMR y CNR tienen un punto común sobre el lado BC, que es Q.

IMO 2004 Problema 2

Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales que satisfacen la igualdad

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

para cualesquiera números reales a, b, c tales que $ab+bc+ca=0$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

En primer lugar, es obvio que

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\right)=2(a+b+c)^2;$$

Luego todos los polinomios de la forma vx^2, con v real, satisfacen la igualdad del enunciado. Además, podemos encontrar que

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)=-2abc(a+b+c).$$

También se tiene

$$ab\left(a^2+b^2\right)+bc\left(b^2+c^2\right)=-(bc+ca)\left(a^2+b^2\right)-(ab+ca)\left(b^2+c^2\right)$$
$$=-abc(a+2b+c)-ac\left(c^2+a^2\right)-b^2(ab+bc+ca);$$

$$2ab\left(a^2+b^2\right)+2bc\left(b^2+c^2\right)+2ac\left(c^2+a^2\right)=-2abc(a+2b+c)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Finalmente, llegamos a que

$$(a-b)^4=a^4+b^4-4ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2;$$

$$(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4=2\left(a^4+b^4+c^4\right)+4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$$
$$=2\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2(a+b+c)^4.$$

Por lo tanto, es obvio que los polinomios $P(x)=ux^4+vx^2$ con u y v reales cualesquiera, satisfacen la igualdad del enunciado. Demostraremos ahora que dichos polinomios (incluida la solución trivial $P(x)=0$ para $u=v=0$) son las únicas soluciones del problema.

Sean x, y reales cualesquiera, y sean

$$a=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}+2x+y}{3};\quad b=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}-x+y}{3};\quad c=\frac{\sqrt{x^2+y^2+xy}-x-2y}{3}.$$

Es trivial comprobar que $a-b=x$, $b-c=y$, $c-a=-(x+y)$, siendo además a, b y c reales, pues

$$x^2+y^2+xy=\frac{x^2+y^2+(x+y)^2}{2}\geq 0.$$

Además, es fácil comprobar que:

$$a+b+c=\sqrt{x^2+y^2+xy}\ ;$$

$$ab=\frac{-x^2+2y^2+2xy+(x+2y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}\ ;$$

$$bc=\frac{2x^2-y^2+2xy-(2x+y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}\ ;$$

$$ca=\frac{-x^2-y^2-4xy+(x-y)\sqrt{x^2+y^2+xy}}{9}=-ab-bc\ .$$

Por lo tanto, al cumplirse que $ab+bc+ca=0$, se tiene que, para cualesquier x, y reales, se debe cumplir:

$$P(x)+P(y)+P(-(x+y))=2P\left(\sqrt{x^2+y^2+xy}\right).$$

Haciendo $x=y=0$, se deduce que $P(0)=0$. Haciendo $y=0$, se deduce que, para todo x real,

$$P(x)+P(-x)=2P\left(\sqrt{x^2}\right)=2P(|x|).$$

Por lo tanto, sea x positivo (es decir, $|x|=x$) o negativo (es decir, $|x|=-x$), se deduce que $P(-x)=P(x)$, con lo que $P(x)$ puede admitir únicamente términos de grado par, siendo cero el término independiente por ser $P(0)=0$. Podemos entonces escribir, sin pérdida de generalidad, que

$$P(x)=\sum_{m=1}^{n}a_m x^{2m} \qquad \text{con } a_n \text{ real no nulo.}$$

Supongamos que el grado de $P(x)$ es mayor que 4. Entonces $n>2$. Calcularemos ahora los coeficientes de $x^{2n-2}y^2$ en los polinomios que intervienen en la condición del enunciado. Obviamente, $P(x)$ y $P(y)$ no generarán un tal término. Además, como

$$P(-(x+y))=\sum_{m=1}^{n}a_m(x+y)^{2m}=\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{2m}\binom{2m}{l}x^{2m-l}y^l\ ,$$

$$2P\left(\sqrt{x^2+y^2+xy}\right)=2\sum_{m=1}^{n}a_m\left(x^2+y^2+xy\right)^m=2\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}x^{2(m-l)}\left(y^2+xy\right)^l$$

$$=2\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}x^{2m-(2l-k)}y^{2l-k},$$

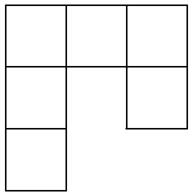
un tal término sólo puede aparecer con $m=n$, $l=1,2$, $k=2l-2$ en el segundo polinomio, y para $m=2$, $l=2$ en el primero, debiendo ser ambos coeficientes iguales pues la igualdad entre polinomios debe ser satisfecha para cualesquier valores reales x e y. Esto lleva a:

$$a_n\binom{2n}{2}=2a_n n+2a_n\binom{n}{2}; \qquad\qquad a_n n\left(n-2\right)=0\,.$$

Pero esto es falso para $n>2$. Contradicción. Luego el grado de $P(x)$ no puede ser mayor que 4, y como se ha visto anteriormente, sus únicos coeficientes no nulos corresponden a términos de grado par y su término independiente debe ser nulo, por lo que las soluciones expuestas al principio del problema son las únicas, q.e.d..

IMO 2004 Problema 3

Se define un gancho como una figura con seis cuadrados unidad como muestra el diagrama

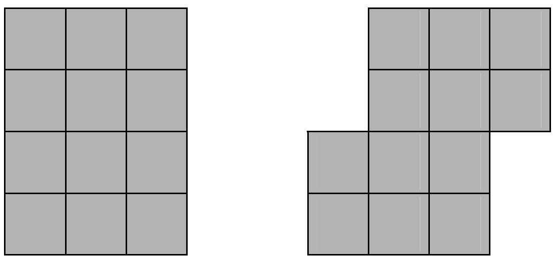


o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflejando la figura. Determina todos los rectángulos *m*x*n* que pueden ser cubiertos con ganchos de forma que

i. el rectángulo esté cubierto sin agujeros ni superposiciones.
ii. ninguna parte de un gancho queda fuera del rectángulo.

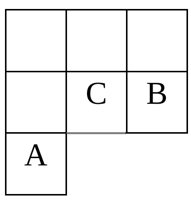
Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

<u>Lema 1:</u> El número de ganchos debe ser par, estando además organizados por parejas de formas que se forman piezas de 12 cuadrados unidad de uno de los dos tipos que muestra el siguiente diagrama

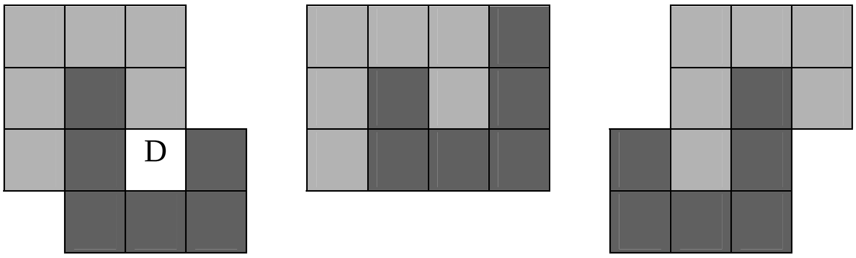


o cualquiera de las figuras obtenidas aplicando rotaciones y reflexiones a las dos figuras mostradas.

<u>Demostración:</u> Identificamos algunos de los cuadrados unidad del gancho y adyacentes:



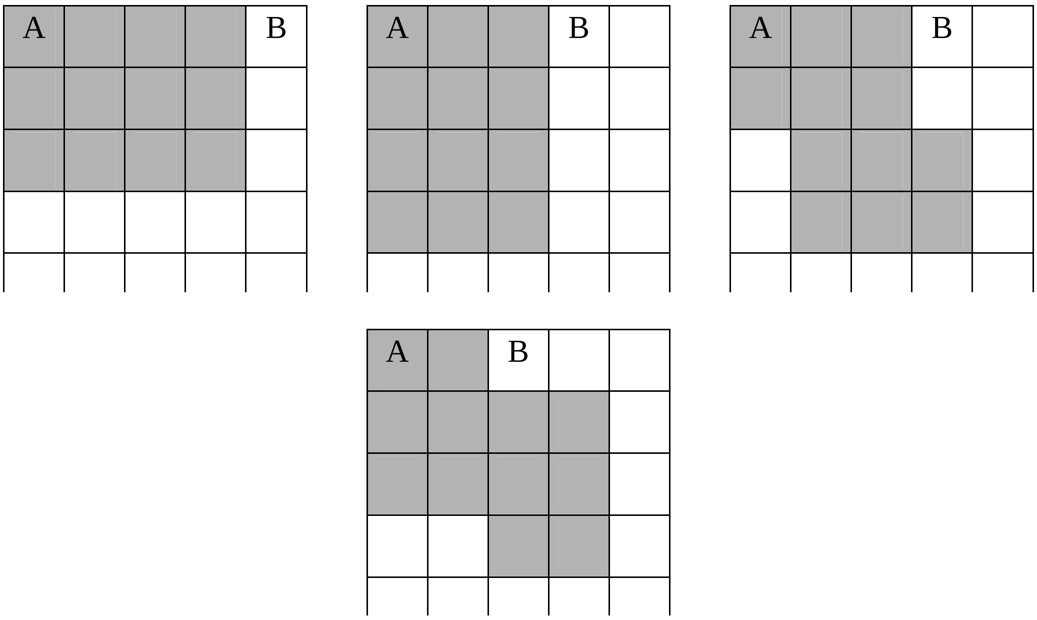
Obviamente, si el gancho dibujado se utiliza para recubrir sin salirse un rectángulo *mxn*, el cuadrado C será siempre interior a dicho rectángulo. Luego debe estar recubierto por un gancho que no se superponga con el gancho dado, lo cual se puede hacer de una de las tres siguientes maneras:



En el primer caso, el cuadrado D no se puede cubrir, luego las únicas opciones válidas son la segunda y tercera, que nos generan figuras como las mostradas en el enunciado del lema 1 (salvo reflexiones y/o rotaciones), q.e.d..

Lema 2. Ni m ni n pueden ser iguales a 5, siendo ambos mayores o iguales que 3 y al menos uno de ellos mayor o igual que 4.

Demostración: Cada una de las piezas de 12 cuadrados mostradas en el lema 1 ocupa un mínimo de 3 filas y 4 columnas o viceversa, luego m y n son mayores o iguales que 3, siendo al menos uno de ellos mayor o igual que 4, pues si no la pieza se saldría del rectángulo. Considérese ahora la siguiente figura:



La figura muestra todas las posibles maneras de recubrir el cuadrado unidad A, situado en el vértice superior izquierdo de un rectángulo mx5, utilizando piezas descritas en el lema 1. En cada caso, el cuadrado B no puede cubrirse con ninguna pieza mostrada en el lema 1 sin superposiciones o sin salirse. Luego $n \neq 5$. De forma análoga, rotando las figuras, se demuestra que $m \neq 5$.

Lema 3: Si 4 divide a m y 3 a n (o viceversa) el rectángulo siempre se puede recubrir con ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse.

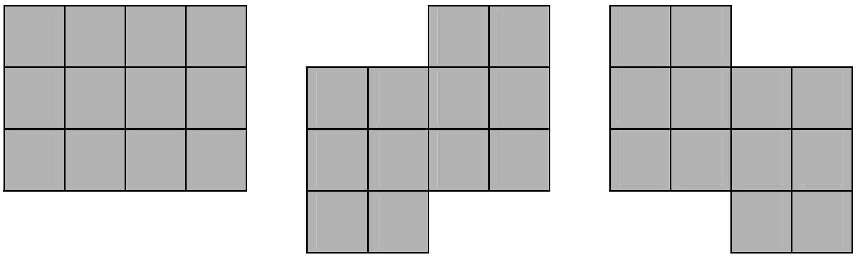
Demostración: Divídase el rectángulo mxn en $m/4$ rectángulos 4xn. Divídase a continuación cada uno de ellos en $(n/3)$ rectángulos 4x3. Es entonces obvio que se puede recubrir el rectángulo, sin huecos, sin superposiciones y sin salirse mediante rectángulos 4x3, pudiendo cada rectángulo 4x3 recubrirse sin huecos, sin superposiciones y sin salirse mediante 2 ganchos por el lema 1. Luego también puede recubrirse de tal manera el rectángulo mxn, q.e.d.. La demostración es análoga si 3 divide a m y 4 a n considerando $(m/3)(n/4)$ rectángulos 3x4.

Lema 4: Si 12 divide a m, entonces el rectángulo se puede recubrir si y sólo si $n \geq 3$, $n \neq 5$ (o viceversa).

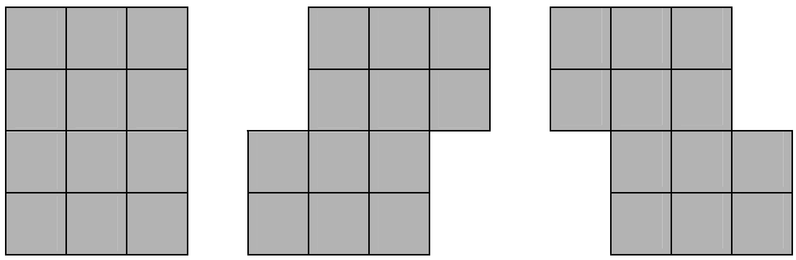
Demostración: Si 3 o 4 dividen a n, entonces por el lema 3 el rectángulo mxn puede recubrirse de acuerdo al enunciado. En caso contrario, siempre podemos escribir $n=4a+3b$ con a y b enteros positivos, pues $7=4+3$, $10=2\cdot3+4$, $11=2\cdot4+3$, y para todo n natural distinto de estos tres que cumpla $n \geq 3$, $n \neq 5$ sin ser múltiplo ni de 3 ni de 4, entonces $n \geq 13$, con lo que bien $n-3$, bien $n-6$, bien $n-9$ son múltiplos positivos de 4, pudiendo entonces tomarse $b=1$, 2 o 3, y $a=(n-3)/4$, $(n-6)/4$ o $(n-9)/4$, respectivamente. Divídase ahora el rectángulo mxn en un rectángulo mx$4a$ y un rectángulo mx$3b$, cada uno de los cuales puede recubrirse por el lema 3 mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse. Luego también puede recubrirse así el rectángulo mxn, q.e.d..

Teorema: Los casos considerados en los lemas 3 y 4 son los únicos en los que un rectángulo mxn puede recubrirse mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse.

Demostración: Por el lema 1, un rectángulo que se pueda recubrir por ganchos se puede recubrir por piezas de 12 cuadrados, luego 12 divide a mn. Supongamos ahora que existen m y n tales que el rectángulo mxn puede recubrirse mediante ganchos, pero m y n no satisfacen las hipótesis de los lemas 3 o 4. Entonces, como 12 divide a mn, 3 divide a m (sin pérdida de generalidad). Si no se satisfacen las condiciones de los lemas, 4 no divide ni a m ni a n. Pero como 4 divide a su producto, ambos deben ser pares pero no múltiplos de 4. Luego 6 divide a m y 2 a n, siendo $m/6$ y $n/2$ impares (o viceversa). De las piezas que se pueden conseguir aplicando rotaciones o reflexiones a las mostradas en el lema 1, llamaremos horizontales a las tres siguientes:



Llamaremos verticales a las tres siguientes:



Por el lema 1, si un rectángulo mxn puede recubrirse por ganchos, entonces puede recubrirse mediante piezas de estos 6 tipos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse. Ahora bien, cada pieza horizontal recubre un número impar (3) de cuadrados de 4 columnas adyacentes, y un número par (2 o 4) de 3 o 4 filas adyacentes, mientras que cada pieza vertical recubre un número par (2 o 4) de 3 o 4 columnas adyacentes, y un número impar (3) de 4 filas adyacentes. Luego como m y n son pares, cada fila tiene intersección no vacía con un número par de piezas verticales, y cada columna con un número impar de piezas horizontales. Sea ahora el v_i número de piezas verticales que tienen intersección no vacía con las filas i, $i+1$, $i+2$ e $i+3$ (siendo por definición $v_{m-2}=v_{m-1}=v_m=0$). Entonces, la suma de cada 4 v_i consecutivos es par, siendo pares además v_1, v_1+v_2 (con lo que v_2 también es par) y $v_1+v_2+v_3$ (con lo que v_3 también es par). Por inducción, es trivial ver que todos los v_i son pares, pues para $i\geq 4$, y tomando como hipótesis de inducción que v_{i-1}, v_{i-2} y v_{i-3} son pares, al ser su suma con v_i par, también es par v_i. Como el número total de piezas verticales utilizadas en el recubrimiento es igual a la suma de los v_i, y todos ellos son pares, el número total de piezas verticales utilizadas es par. De forma enteramente análoga se demuestra que es par el número de piezas horizontales utilizadas. Luego el número total de piezas de 12 cuadrados cada una utilizadas para recubrir al rectángulo mxn es par, y 24 divide a mn. Contradicción, pues $mn/12$ es impar por hipótesis. Luego no se puede recubrir de la forma descrita en el enunciado ningún rectángulo que no cumpla las hipótesis de los lemas 3 o 4, q.e.d..

Luego un rectángulo mxn se puede recubrir mediante ganchos sin huecos, sin superposiciones y sin salirse si y solamente si bien m o n es múltiplo de 12 siendo el otro mayor o igual que 3 y distinto de 5, bien si uno de ellos es múltiplo de 3 y el otro de 4.

IMO 2004 Problema 4

Sea $n \geq 3$ un entero. Sean $t_1,t_2,...,t_n$ números reales positivos tales que

$$n^2+1>(t_1+t_2+...+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right).$$

Demostrar que t_i, t_j, t_k son las medidas de un triángulo para todos los i, j, k con $1 \leq i<j<k \leq n$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Lema: sean $t_1,t_2,...,t_n$ números reales positivos cualesquiera con $n \geq 3$. Si existen tres cualesquiera distintos de entre ellos, t_i, t_j, t_k, tales que se verifica la siguiente desigualdad:

$$(t_i+t_j+t_k)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)\geq 10,$$

entonces se cumple como consecuencia que

$$(t_1+t_2+...+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+...+\frac{1}{t_n}\right)\geq n^2+1.$$

Demostración:

Obviamente, el lema se cumple trivialmente para $n=3$. Supongamos ahora que para algún $n \geq 3$ el lema se cumple para todos los conjuntos de n reales positivos tales que tres cualesquiera de ellos verifican la hipótesis del lema. Sea ahora A un conjunto de $n+1$ reales positivos tal que tres de ellos verifican la hipótesis del lema. Entonces, la tesis del lema se cumple para cualquier subconjunto de A con n elementos que incluye a los tres que verifican la hipótesis del lema verifica la tesis del lema. Sin perdida de generalidad, sea $\{t_1,t_2,...,t_n\}$ uno de dichos subconjuntos. Entonces,

$$\begin{aligned}&(t_1+...+t_n+t_{n+1})\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}\right)\\ &=(t_1+...+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+...+\frac{1}{t_n}\right)+\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_1}\right)+...+\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)+1\\ &\geq n^2+1+\left(\frac{t_1}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_1}\right)+...+\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}+\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)+1.\end{aligned}$$

Por la desigualdad de medias aritmética y geométrica aplicada a t_i/t_{n+1} y t_{n+1}/t_i, que son reales y positivos, su suma es mayor o igual que 2, por ser su producto 1, luego

$$\left(t_1+\ldots+t_n+t_{n+1}\right)\left(\frac{1}{t_1}+\ldots+\frac{1}{t_n}+\frac{1}{t_{n+1}}\right)\geq n^2+1+2n+1=\left(n+1\right)^2+1.$$

Luego el lema queda probado para todo $n\geq 3$ por inducción.

Sean ahora $t_1,t_2,\ldots,t_n$ números reales positivos que satisfacen la desigualdad del enunciado del problema. Para tres cualesquiera distintos de entre ellos, t_i, t_j y t_k, se cumple que

$$\left(t_i+t_j+t_k\right)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)<10,$$

pues en caso contrario, y por el lema demostrado, se llegaría a una contradicción con la hipótesis del enunciado. Supongamos ahora, sin pérdida de generalidad, que $t_k\geq t_i,t_j$, y definamos $t_k=r(t_i+t_j)$ donde r es obviamente un real positivo. Se tiene entonces que

$$10>\left(t_i+t_j+t_k\right)\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_j}+\frac{1}{t_k}\right)=3+t_k\frac{t_i+t_j}{t_it_j}+\frac{t_i+t_j}{t_k}+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}$$

$$=3+r\frac{\left(t_i+t_j\right)^2}{t_it_j}+\frac{1}{r}+\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\geq 5+4r+\frac{1}{r},$$

donde se han aplicado las desigualdades de las medias aritmética y geométrica a t_i/t_j y t_j/t_i, y a t_i y t_j. Como r es positivo, podemos escribir:

$$10r>5r+4r^2+1; \qquad\qquad 0>4r^2-5r+1=\left(4r-1\right)\left(r-1\right).$$

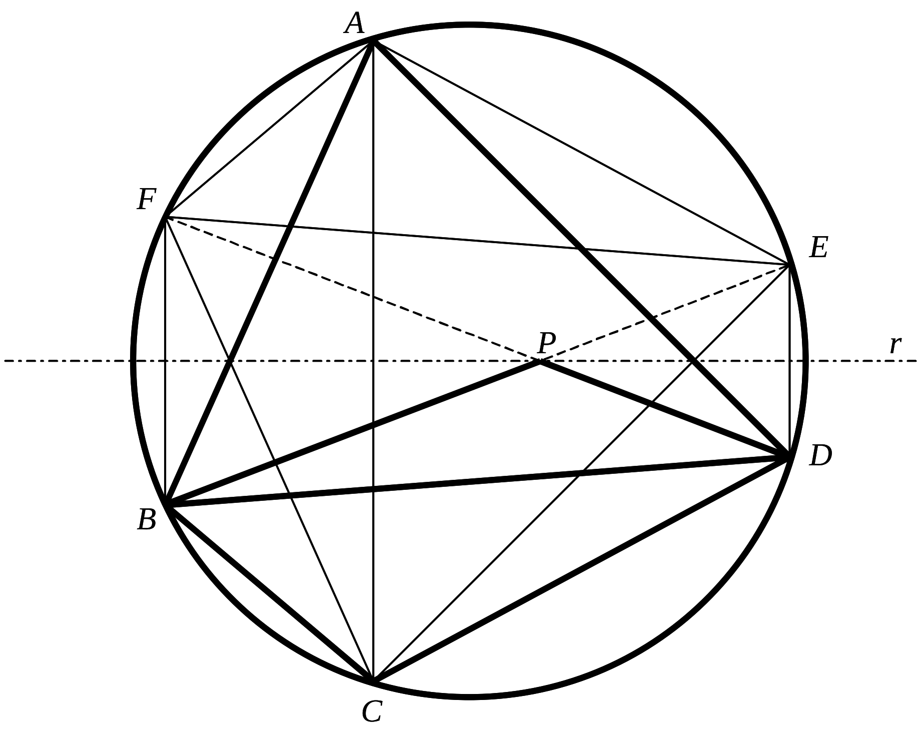
Por ser $t_k\geq t_i,t_j$, $2r(t_i+t_j)=2t_k\geq t_i+t_j$ y $r\geq 1/2$, luego $4r-1\geq 1>0$, con lo que $r-1<0$, y $t_k<t_i+t_j$, luego t_i, t_j y t_k son los lados de un triángulo para cualesquier i, j, k distintos, q.e.d..

En un cuadrilátero convexo $ABCD$ la diagonal BD no es la bisectriz ni de $\angle ABC$ ni de $\angle CDA$. Un punto P en el interior de $ABCD$ verifica $\angle PBC=\angle DBA$ y $\angle PDC=\angle BDA$. Demostrar que los vértices del cuadrilátero $ABCD$ pertenecen a una circunferencia si y sólo si $AP=CP$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Antes de empezar, se considera que $\angle PBC=\angle DBA$ es equivalente a $\angle DBC=\angle PBA$, como se demuestra sumando $\angle PBD$ a ambos lados de la igualdad inicial (siendo $\angle PBD$ negativo si P está en el interior del triángulo BCD). De igual manera, se demuestra que $\angle PDC=\angle BDA$ es equivalente a $\angle BDC=\angle PDA$.

Supongamos ahora que P está sobre la diagonal BD. Entonces, $\angle DBC=\angle PBC=\angle DBA$ y $\angle BDC=\angle PDC=\angle BDA$, con lo que BD es la bisectriz de $\angle ABC$ y de $\angle CDA$, que es falso por hipótesis. Podemos entonces asumir, sin pérdida de generalidad, que P está en el interior del triángulo ABD, pues por simetría en el enunciado y en las fórmulas demostradas anteriormente, A y C pueden intercambiarse sin que varíen ni las condiciones del problema ni los resultados a demostrarse.



Supongamos entonces que *ABCD* es cíclico. Sean *E* y *F* los puntos respectivos donde *PB* y *PD* cortan de nuevo a la circunferencia circunscrita a *ABCD*. Se tiene que, al ser $\angle EBC=\angle PBC=\angle DBA$, entonces $AD=CE$; además, al ser $\angle DBC=\angle PBA=\angle EBA$, entonces $AE=CD$. Al ser sin pérdida de generalidad *P* interior al triángulo *ABD*, *E* está en el arco *AD* que no contiene a *C*, por lo que *ACDE* es un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales son iguales, y dos de sus lados opuestos también. Por lo tanto, *ACDE* es un trapecio isósceles (propiedad conocida) de bases *AC* y *DE*, que tienen por lo tanto una mediatriz común. De manera análoga se demuestra que $AB=CF$ y $AF=BC$, y en consecuencia que *ACBF* es un trapecio isósceles con bases *AC* y *BF*. Por lo tanto, las cuerdas *AC*, *BF* y *DE* tienen una mediatriz común *r*, con respecto a la cual los segmentos *BE* y *DF* son simétricos. Luego al ser *P* el punto común de ambos segmentos, *P* está en *r*, y concluimos que $AP=CP$, q.e.d..

Sea ahora $AP=CP$. Aplicando el teorema del seno a los triángulos *APB*, *BPC*, *CPD*, *DPA*, *ABD* y *BCD*, se obtienen las siguientes igualdades:

$$PA=\frac{AB\sin(\angle PBA)}{\sin(\angle APB)}=\frac{AD\sin(\angle PDA)}{\sin(\angle APD)}; \qquad PC=\frac{BC\sin(\angle PBC)}{\sin(\angle BPC)}=\frac{CD\sin(\angle PDC)}{\sin(\angle CPD)};$$

$$\frac{BC}{CD}=\frac{\sin(\angle BDC)}{\sin(\angle CBD)}; \qquad \frac{AB}{AD}=\frac{\sin(\angle BDA)}{\sin(\angle ABD)}.$$

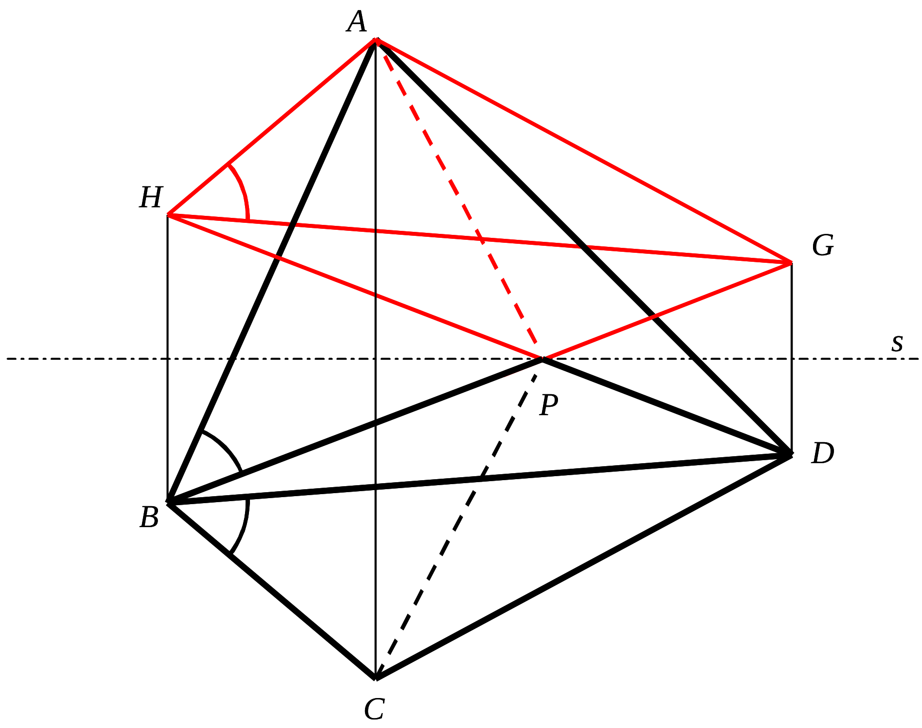
Se tiene entonces que

$$\frac{\sin(\angle APD)}{\sin(\angle APB)}=\frac{AD}{AB}\frac{\sin(\angle PDA)}{\sin(\angle PBA)}=\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle BDA)}\frac{\sin(\angle BDC)}{\sin(\angle DBC)}$$
$$=\frac{\sin(\angle PBC)}{\sin(\angle PDC)}\frac{BC}{CD}=\frac{\sin(\angle BPC)}{\sin(\angle CPD)};$$

$$\cos(\angle APD-\angle CPD)-\cos(\angle APD+\angle CPD)=2\sin(\angle APD)\sin(\angle CPD)$$
$$=2\sin(\angle BPC)\sin(\angle APB)=\cos(\angle BPC-\angle APB)-\cos(\angle BPC+\angle APB)$$
$$=\cos(\angle BPC-\angle APB)-\cos(2p-\angle APD-\angle CPD);$$

$$\cos(\angle APD-\angle CPD)=\cos(\angle BPC-\angle APB).$$

Existen entonces dos posibilidades: bien $\angle APD-\angle CPD=\angle BPC-\angle APB$, con lo que $\angle APD+\angle APB=\angle BPC+\angle CPD=p$ que es absurdo, pues en ese caso *P* estaría en la diagonal *BD*, que ha sido ya demostrado que está en contradicción con las hipótesis del enunciado, bien $\angle APD-\angle CPD=\angle APB-\angle BPC$, de donde deducimos por lo tanto que debe cumplirse necesariamente que $\angle APD+\angle BPC=\angle APB+\angle CPD=p$.



Sea entonces ahora la siguiente construcción geométrica: definimos *G* y *H* como los puntos en las rectas *PB* y *PD*, respectivamente, y tales que *P* está en el interior de los segmentos *BG* y *DH*, con *PG*=*PD* y *PH*=*PB*. Sea *s* la bisectriz interior de los ángulos formados por las rectas *PB* y *PD* que deja *B* y *D* en el mismo semiplano. Por construcción, *H* y *G* son los puntos simétricos de *B* y *D*, respectivamente, con respecto a *s*, y *s* es la mediatriz común de *BH* y *DG*. Por hipótesis, *AP*=*CP*, y por construcción, $\angle APG = p - \angle APB = \angle CPD$, con lo que los triángulos *APG* y *CPD* son simétricos con respecto a *s*, siendo además *AG*=*CD*. De la misma forma se demuestra que los triángulos *APH* y *CPB* son simétricos con respecto a *s*, siendo además *AH*=*BD*. Por construcción *GH*=*BD*, con lo que los triángulos *BCD* y *HAG* son simétricos con respecto a *s*. Luego *A* y *C* son simétricos con respecto a *s*. Ahora bien, *BDGH* es cíclico al ser por consctrucción un trapecio isósceles de bases *BH* y *DG*, siendo *s* un eje de simetría de su circunferencia circunscrita, al ser mediatriz común de dichas bases. Además, $\angle GHA = \angle DBC = \angle PBA = \angle GBA$, con lo que *AHBG* es cíclico, y *A* está en la circunferencia circunscrita a *BDGH*, y por ser *C* simétrico de *A* con respecto a *s*, *C* también está en dicha circunferencia. Luego *ABCD* es cíclico, q.e.d..

IMO 2004 Problema 6

Un entero positivo es *alternante* si, en su representación decimal, en toda pareja de dígitos consecutivos uno es par y el otro impar. Encontrar todos los enteros positivos n tales que n tiene un múltiplo que es alternante.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Obviamente, los múltiplos de 20 no pueden ser nunca alternantes, ya que en cualquier caso su última cifra es 0 y su penúltima cifra es par, luego sus dos últimas cifras son pares. Entonces, ni 20 ni sus múltiplos pueden tener múltiplos alternantes. Demostraremos sin embargo que todo entero n no múltiplo de 20 sí tiene al menos un múltiplo alternante, a través de lemas intermedios:

Lema 1: Para cada entero $a\geq 1$, todo entero positivo n primo con 2 y 5 tiene un múltiplo de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2ab} = 10^{2a(B-1)} + 10^{2a(B-2)} + \ldots + 10^{2a} + 1 = \frac{10^{2aB}-1}{10^{2a}-1}.$$

Demostración: Obviamente, n es primo con 10. Por lo tanto, por el teorema de Euler-Fermat, se tiene que $10^{f(n)}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, donde $f(n)$ es el indicador de n. Si $10^{2a}-1$ es múltiplo de n, entonces se tiene que, para todo entero $b\geq 1$, $10^{2ab}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$, con lo que

$$\frac{10^{2an}-1}{10^{2n}-1} = \sum_{b=0}^{n-1} 10^{2an} \equiv \sum_{b=0}^{n-1} 1 \equiv n \left(\mathrm{mod}\, n\right)$$

es múltiplo de n. En caso contrario, considérese el siguiente número:

$$\sum_{b=0}^{f(n)-1} 10^{2ab} = \frac{10^{2af(n)}-1}{10^{2a}-1}.$$

Ahora bien, en la anterior fracción el denominador no es múltiplo de n por hipótesis, pero el numerador sí (ya que $10^{2af(n)}\equiv 1^{2a}\equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$), a la vez que la fracción tiene valor entero. Por lo tanto, la fracción define un entero múltiplo de n. Entonces, sea cual sea a, hemos demostrado que se puede construir un entero de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2ab} = \frac{10^{2aB}-1}{10^{2a}-1}$$

que es múltiplo de n, q.e.d..

Lema 2: Toda potencia de 5 de la forma 5^{2u} ($u \geq 1$) tiene un múltiplo impar alternante de $2u$ cifras. Como corolario obvio, toda potencia de 5 tiene un múltiplo impar alternante con un número par de cifras.

Demostración: El lema es obvio para $u=1$, pues 25 es múltiplo de 5^2. Supongamos que el lema es válido para u. Entonces existe un número alternante de $2u$ cifras que podemos escribir como $5^{2u}m$. Sea ahora r el resto de dividir m por 25. Entonces, el resto de dividir $5^{2u}m$ por $5^{2(u+1)}$ es $5^{2u}r$. Considérense ahora todos los números de la forma

$$5^{2u}m + s10^{2u} = \left(m + 2^{2u}s\right)5^{2u},$$

donde s es un número alternante impar de dos cifras. Como exactamente las últimas $2u$ cifras de $s10^{2u}$ son cero, y las dos restantes son, la primera par, la segunda impar, los números de la forma definida son alternantes (la primera de las $2u$ cifras de $5^{2u}m$ es par, pues es un número alternante de número par de cifras que acaba en cifra impar) y tienen $2(u+1)$ cifras. Nos basta entonces encontrar un s tal que dicho número sea también múltiplo de $5^{2(u+1)}$ (es decir, tal que 25 divida a $m+2^{2u}s$) para demostrar el lema 2 por inducción sobre u. Tenemos entonces que encontrar un número alternante impar de dos cifras tal que

$$m + 2^{2u}s \equiv r + 2^{2u}s \equiv 0 \pmod{25}.$$

Ahora bien, es obvio que

$$2^{2u} \equiv 4^u \equiv (-1)^u \pmod{5},$$

con lo que

$$2^{2u}s \equiv (-1)^u s \pmod{25}.$$

Si u es par, elegimos s entre el conjunto $\{25-r, 50-r, 75-r, 100-r\}$. Uno de ellos es alternante, pues $50-r$ y $100-r$ por un lado, y $75-r$ y $25-r$ por otro, difieren uno de otro en la paridad de las decenas, mientras que $50-r$ y $75-r$ por un lado, y $100-r$ y $25-r$ por otro, difieren en la paridad de las unidades. Luego uno de estos cuatro números tiene cifra de decenas par y cifra de unidades impar, y por lo tanto es alternante impar de dos cifras. Si u es impar, entonces elegimos s entre el conjunto $\{r, 25+r, 50+r, 75+r\}$, siendo igualmente uno de ellos alternante impar. Luego hemos hallado un número impar alternante de $2(u+1)$ cifras que es múltiplo de $5^{2(u+1)}$, con lo que el lema 2 queda probado por inducción.

Lema 3: Toda potencia de 2 de la forma $2^{2(v+1)}$ ($v\geq 1$) tiene un múltiplo alternante (obviamente par) de $2v$ cifras que no es múltiplo de 2^{2v+3}. Como corolario obvio, toda potencia de 2 tiene un múltiplo alternante con un número par de cifras.

Demostración: El lema se cumple obviamente para $v=1$, pues 16 es múltiplo alternante de 2^4, pero no de 2^5. Demostraremos ahora el lema 3 para todo v por inducción. Supongamos entonces que el lema 3 se cumple para v. Entonces existe un número alternante de $2v$ cifras, que es múltiplo de $2^{2(v+1)}$ pero no de 2^{2v+3}, es decir, existe un número de $2v$ cifras que podemos escribir como $2^{2(v+1)}m$ con m impar. Consideremos el siguiente número:

$$2^{2(v+1)}m+s10^{2v}=\left(m+\frac{5^{2v}s}{4}\right)2^{2(v+1)},$$

donde s es alternante de dos cifras y múltiplo de 4 pero no de 8. Obviamente, el número así construido tiene una expresión digital formada por un número par alternante de dos cifras, seguido por un número par alternante de $2v$ cifras cuya primera cifra es por lo tanto impar. Se tiene entonces que el número formado es un número par, alternante y de $2(v+1)$ cifras. Ahora bien, como el resto de dividir 5^2 por 4 y por 8 es 1, se tiene que

$$m+\frac{5^{2v}s}{4}\equiv m+\frac{s}{4}\pmod 4;$$

$$m+\frac{5^{2v}s}{4}\equiv m+\frac{s}{4}\pmod 8.$$

Por lo tanto, si conseguimos elegir s tal que $m+s/4$ sea múltiplo de 4 pero no de 8, habremos probado el lema 3. Pero esto es siempre posible, ya que si $m\equiv 1 \pmod 8$, podemos tomar $s=12$, mientras que si $m\equiv 5 \pmod 8$, podemos tomar $s=92$, a la vez que si $m\equiv 3 \pmod 8$, podemos tomar $s=36$, mientras que si $m\equiv 7 \pmod 8$, podemos tomar $s=52$. Luego por inducción, y para todo $v\geq 1$, hemos demostrado como construir un número alternante de $2(v+1)$ cifras que es múltiplo de $2^{2(v+1)}$ pero no de 2^{2v+3}, q.e.d..

Teorema: Todo entero positivo n que no es múltiplo de 20 posee un múltiplo alternante.

Demostración: Caso 1: Supongamos que n es impar y no es múltiplo de 5. Entonces, por el lema 1 con $a=1$, n tiene un múltiplo de la forma

$$\frac{10^{2B}-1}{10^2-1}=\sum_{b=0}^{B-1}10^{2b}=10101...101,$$

que es obviamente alternante y además es impar.

Caso 2: Supongamos ahora que n es impar y múltiplo de 5. Lo podemos entonces escribir como

$$n = 5^u n',$$

donde 5 no divide a n' y $u \geq 1$. Sea ahora u' entero tal que $2u' \geq u$. Por el lema 2, podemos encontrar un número alternante de $2u'$ cifras que es múltiplo de $5^{2u'}$, y por lo tanto de 5^u. Al mismo tiempo, por el lema 1, podemos encontrar un múltiplo de n' de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2u'b} = \frac{10^{2u'B} - 1}{10^{2u'} - 1}.$$

El resultado del producto de estos dos números es una cadena de $2u'B$ dígitos, que se puede dividir en B grupos idénticos de $2u'$ dígitos alternantes, de forma que en cada uno de los B grupos el primer dígito es par y el último 5. Por lo tanto, el número así construido es alternante, y por su construcción es múltiplo de n, y además impar.

Caso 3: Supongamos ahora que n es par de la forma $2^v n'$, con $v \geq 1$ y donde n' es impar pero no múltiplo de 5. Sea entonces v' un entero positivo tal que $2(v'+1) \geq v$. Por el lema 3, existe un número alternante de $2v'$ cifras que es múltiplo de $2^{2(v'+1)}$, y por lo tanto de 2^v. Al mismo tiempo, por el lema 1, existe un múltiplo de n' de la forma

$$\sum_{b=0}^{B-1} 10^{2v'b} = \frac{10^{2v'B} - 1}{10^{2v'} - 1}.$$

El resultado del producto de estos dos números es una cadena de $2v'B$ dígitos, que se puede dividir en B grupos idénticos de $2v'$ dígitos de paridad alternante, de forma que en cada uno de los B grupos el primer dígito es impar y el último par. Por lo tanto, el número así construido es alternante, y por su construcción es múltiplo de n.

Caso 4: Supongamos ahora que n es par y múltiplo de 5, pero no es múltiplo de 20. Luego 4 no divide a n. Podemos entonces escribir $n=10n'$, donde n' es impar. Por lo tanto, n' pertenece al caso 1 o 2, con lo que podemos encontrar un múltiplo alternante impar de n'. Ahora bien, 10 veces ese múltiplo alternante impar sigue siendo alternante, y por construcción es múltiplo de n.

Luego siempre que n no sea múltiplo de 20, hemos demostrado que podemos encontrar un múltiplo alternante de n. Como además, si n es múltiplo de 20, es imposible que tenga un múltiplo alternante, la respuesta al problema es que tienen múltiplos alternantes todos los enteros positivos salvo los múltiplos de 20.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI