Hallar todos los números naturales m tales que

$$1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot(2m-1)!=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!\,.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Denotaremos por x_m al miembro de la izquierda y por y_m al de la derecha, es decir,

$$x_m=1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot\ldots\cdot(2m-1)!;\qquad\qquad y_m=\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)!\,.$$

Se puede calcular fácilmente que:

$$x_1=1!=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)!=y_1;\qquad\qquad x_2=1!\cdot 3!=3!=\left(\frac{2(2+1)}{2}\right)!=y_2;$$

$$x_3=1!\cdot 3!\cdot 5!=6\cdot 5!=6!=\left(\frac{3(3+1)}{2}\right)!=y_3;$$

$$x_4=1!\cdot 3!\cdot 5!\cdot 7!=2^2\cdot 3^2\cdot 4\cdot 5\cdot 7!=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!=10!=\left(\frac{4(4+1)}{2}\right)!=y_4\,.$$

Por lo tanto, la igualdad propuesta se cumple para m=1, 2, 3 y 4. Probaremos ahora que éstas son las únicas soluciones.

Definimos $P_2(x)$ como la máxima potencia de 2 que divide a x. Es conocido que

$$P_2(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right].$$

Utilizando que $P_2(x_4)=P_2(y_4)$ por ser $x_4=y_4$, demostraremos que, para $m\geq 5$, $P_2(x_m)>P_2(y_m)$. Para ello, compararemos $P_2(x_m)$ y $P_2(x_{m+1})$ por un lado, y $P_2(y_m)$ y $P_2(y_{m+1})$ por otro:

$$P_2(x_{m+1})=P_2((2m+1)!\cdot x_m)=P_2((2m+1)!)+P_2(x_m);$$

$$P_2((2m+1)!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m+1}{2^i}\right]\geq\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{2m}{2^i}\right]=m+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{2^i}\right]=m+P(m!);$$

$$P_2(x_{m+1})-P_2(x_m)\geq m+P_2(m!)\,.$$

Consideremos ahora el conjunto $A_{m+1}=\{m(m+1)/2+1,m(m+1)/2+2,\ldots,(m+1)(m+2)/2\}$, que tiene obviamente $m+1$ elementos que son enteros consecutivos. Sea a el exponente de la mayor potencia de 2 que tiene un múltiplo contenido en A_{m+1}. Entonces, existe al menos un número de la forma $2^a c$ (con c impar) incluido en ese A_{m+1}. Ahora bien, 2^a no divide a ningún otro elemento de ese conjunto, pues por definición ningún elemento de A_{m+1} es múltiplo de 2^{a+1}, y si existe otro número que es de la forma $2^a c'$, siendo c' otro impar distinto de c, entonces existe al menos un número par entre c y c', y 2^a multiplicado por dicho número par sería múltiplo de 2^{a+1} y estaría incluido en A_{m+1}, lo cual es absurdo. Podemos entonces escribir cada elemento del conjunto como $2^a c+x$ o como $2^a c-x$, eligiendo siempre x como no negativo. Ahora bien, si x es no nulo y $2^a c+x$ o $2^a c-x$ está en A_{m+1}, entonces $P_2(2^a c+x)=P_2(2^a c-x)=P_2(x)$, que se demuestra así: si 2^b divide a x, y $b\geq a$, entonces 2^a divide a x, y por lo tanto también divide a $2^a c+x$ y a $2^a c-x$, que es absurdo si uno de los dos está en A_{m+1}; si 2^b divide a x, y $b<a$, entonces 2^b también divide a 2^a, y 2^b divide tanto a $2^a c+x$ como a $2^a c-x$. Recíprocamente, sabemos que si 2^b divide a $2^a c+x$ o a $2^a c-x$, con x no nulo y estando al menos uno de ellos en A_{m+1}, entonces $b<a$, con lo que 2^b también divide a 2^a, y 2^b debe por lo tanto dividir a x. Supongamos que podemos escribir el menor número de A_{m+1} como 2^a-y. Entonces, al haber $m+1$ elementos en A_{m+1}, el mayor elemento de A_{m+1} es 2^a+m-y, con lo que

$$\begin{aligned} P_2(y_{m+1})-P_2(y_m) &= \sum_{j=1}^{y} P_2\left(2^a c-j\right)+\sum_{j=1}^{m-y} P_2\left(2^a c+j\right)+a=\sum_{j=1}^{y} P_2(j)+\sum_{j=1}^{m-y} P_2(j)+a \\ &= P_2(y!)+P_2\left((m-y)!\right)+a. \end{aligned}$$

Ahora bien, como el número de combinaciones de m elementos tomados de y en y es un número entero, se tiene que $(m-y)!y!$ divide a $m!$, con lo que

$$P_2(m!)\geq P_2(y!)+P_2\left((m-y)!\right).$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P_2(x_{m+1})-P_2(y_{m+1}) &\geq P_2(x_m)-P_2(y_m)+m-a+P_2(m!)-P_2(y!)-P_2\left((m-y)!\right) \\ &\geq P_2(x_m)-P_2(y_m)+m-a. \end{aligned}$$

Ahora bien, como $2^a c\leq(m+1)(m+2)/2$, y si $m\geq 4$, entonces $2^m\geq m^2$, se deduce que

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}=\frac{m^2+3m+2}{2}<\frac{m^2+4m}{2}\leq m^2\leq 2^m.$$

Por lo tanto, si $m\geq 4$ entonces $a<m$, y

$$P_2(x_{m+1})-P_2(y_{m+1})>P_2(x_m)-P_2(y_m).$$

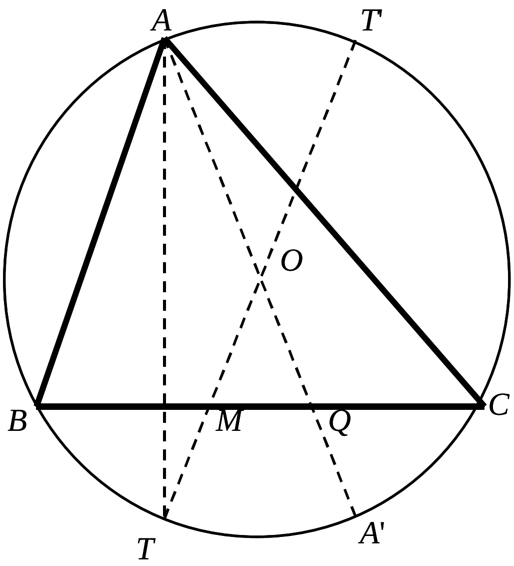
Luego si $P_2(x_m)\geq P_2(y_m)$ con $m\geq 4$, entonces $P_2(x_{m+1})>P_2(y_{m+1})$, y se ha demostrado por inducción que para $m\geq 5$, $P_2(x_m)>P_2(y_m)$, luego no puede haber soluciones con $m\geq 5$.

En el triángulo *ABC*, la altura desde *A* corta a la circunferencia circunscrita en *T*. El diámetro de la circunferencia circunscrita que pasa por *A* y la recta *OT* (*O*, circuncentro) cortan al lado *BC* en *Q* y *M*, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{[AQC]}{[MTC]}=\left(\frac{\sin B}{\cos C}\right)^2$$

donde [ ] representa el área.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Obviamente, la recta *OT* contiene a un diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean *A'*, *T'* los segundos puntos donde los diámetros por *A* y *T* respectivamente cortan a la circunferencia circunscrita. Es entonces obvio que *ATA'T'* es un rectángulo, por ser $\angle ATA'=\angle AT'A'$ y $\angle TAT'=\angle TA'T'$ rectos al ser *AA'* y *TT'* diámetros. Además, por ser *AT* perpendicular a *BC*, también lo es *A'T'*, y *AT'* y *TA'* son paralelos a *BC*. Por lo tanto, los ángulos que forman *AA'* y *TT'* con *BC* son iguales, o lo que es lo mismo, $\angle AQC=\angle TMC$. Es obvio también que *AT'* y *TA'* son simétricos con respecto a la mediatriz común de *TA'* y *AT'*, que es la perpendicular a *BC* por el punto medio del rectángulo, es decir *O*. Por lo tanto, $CT'=AB$, y por el teorema del seno, $\angle CTM=\angle CTT'=\angle C=\angle ACQ$. De aquí podemos concluir que los triángulos *AQC* y *CMT* son semejantes, y en consecuencia, que

$$\frac{[AQC]}{[CMT]}=\left(\frac{AC}{CT}\right)^2.$$

Ahora bien, siendo r el radio de la circunferencia circunscrita, se tiene por el teorema del seno que $AC=2r\sin B$. Por otra parte, $\angle CAT=\angle BAC-\angle BAT$, y al ser AT perpendicular a BC, $\angle BAT=p/2-\angle B$, es decir, $\angle CAT=\angle A+\angle B-p/2=p/2-\angle C$, con lo que $CT=2r\sin(\angle CAT)=2r\cos C$. Sustituyendo estos dos valores encontrados para AC y CT en la ecuación anterior para el cociente de las áreas y simplificando, se obtiene el resultado buscado.

Si *a*, *b*, *c* son números positivos tales que

$$1 = ab + bc + ca + 2abc\,,$$

demostrar que

$$2(a+b+c)+1 \geq 32abc\,.$$

¿Cuándo se verifica la igualdad?

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

De la igualdad dada, aplicando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica a *ab*, *bc* y *ca*, que son positivos, y llamando *G* a la media geométrica de *a*, *b* y *c*, se tiene:

$$\frac{1-2G^3}{3} = \frac{1-2abc}{3} = \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = G^2\,;$$

$$0 \geq 2G^3 + 3G^2 - 1 = (G+1)^2(2G-1)\,.$$

Como *G* es positivo, se deduce que $G \leq 1/2$. Podemos ahora deducir también que:

$$ab+bc+ca = 1-2abc = 1-2G^3 \geq 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz a los vectores (a,b,c) y (b,c,a), se tiene

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \geq \frac{3}{4}\,.$$

Por lo tanto, se llega a

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq \frac{3}{4}+2\frac{3}{4} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Como $a+b+c$ es positivo, se demuestra finalmente que

$$2(a+b+c)+1 \geq 2\frac{3}{2}+1 = 4 \geq 32G^3 = 32abc\,,$$

q.e.d.. Como hemos aplicado la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica de *ab*, *bc* y *ca*, y la desigualdad de Cauchy-Schwartz a (a,b,c) y (b,c,a), la igualdad se da si y solamente si $a=b=c=G=1/2$.

Sean z_1, z_2, z_3 números complejos mutuamente distintos, tales que

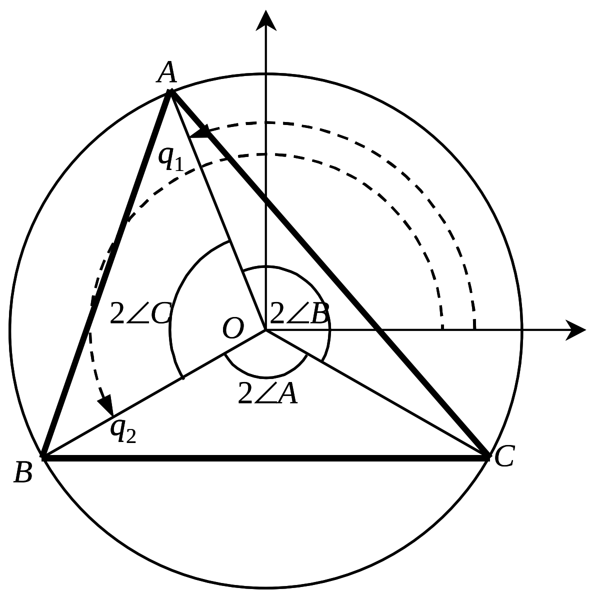
$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,$$

y supongamos que el triángulo cuyos vértices son los puntos cuyos afijos son z_1, z_2, z_3, es acutángulo. Demostrar que si se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2+|z_1+z_2|} + \frac{1}{2+|z_2+z_3|} + \frac{1}{2+|z_3+z_1|} = 1,$$

entonces el triángulo es equilátero.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sean A, B y C los puntos cuyos afijos respectivos son z_1, z_2, z_3. Como O, el punto cuyo afijo es z=0, es el circuncentro de ABC, se tiene que $\angle BOC$=2$\angle A$, $\angle COA$=2$\angle B$, $\angle AOB$=2$\angle C$. Sean entonces

$$z_1 = e^{iq_1} = \cos(q_1) + i\sin(q_1);$$

$$z_2 = e^{iq_2} = \cos(q_2) + i\sin(q_2);$$

$$z_3 = e^{iq_3} = \cos(q_3) + i\sin(q_3)$$

Es entonces una propiedad conocida de los ángulos formados por dos vértices del triángulo y su circuncentro que (ver figura)

$$\angle A = \left|\frac{q_3 - q_2}{2}\right|; \qquad \angle B = \left|\frac{q_3 - q_1}{2}\right|; \qquad \angle C = \left|\frac{q_1 - q_2}{2}\right|.$$

Ahora bien, por ser el triángulo acutángulo, cada uno de estos tres ángulos es menor que *p*/2, y se tiene:

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2| &= \sqrt{\left[\cos(q_1) + \cos(q_2)\right]^2 + \left[\sin(q_1) + \sin(q_2)\right]^2} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos(q_1)\cos(q_2) + 2\sin(q_1)\sin(q_2)} = \sqrt{2 + 2\cos(q_1 - q_2)} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos^2\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right) - 2\sin^2\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{q_1 - q_2}{2}\right) = 2\cos(C).\end{aligned}$$

De la misma forma, se demuestra que

$$|z_2 + z_3| = 2\cos(A); \qquad |z_3 + z_1| = 2\cos(B).$$

Por lo tanto, los ángulos del triángulo considerado satisfacen la relación:

$$\frac{1}{1+\cos(B)} + \frac{1}{1+\cos(C)} + \frac{1}{1+\cos(A)} = 2.$$

Ahora bien, utilizando la desigualdad entre medias aritmética y armónica, podemos escribir:

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{\dfrac{1}{1+\cos(B)} + \dfrac{1}{1+\cos(C)} + \dfrac{1}{1+\cos(A)}} \le \frac{3 + \cos(A) + \cos(B) + \cos(C)}{3};$$

$$\cos(A) + \cos(B) + \cos(C) \ge \frac{3}{2}.$$

Podemos entonces utilizar que $\angle A + \angle B + \angle C = p$, con lo que

$$\frac{3}{2} \le \cos(A) + 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right);$$

$$0 \ge \left[\sin\left(\frac{A}{2}\right) - \frac{1}{2}\right]^2 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\right].$$

Pero esto es imposible a menos que $\cos((B-C)/2)=1$ (es decir, a menos que $\angle B = \angle C$), y simultáneamente $\sin(A/2)=1/2$, es decir, $\angle A = p/3$. Luego $\angle B = \angle C = (p - \angle A)/2 = p/3$, y el triángulo cuyos afijos son z_1, z_2 y z_3 es equilátero, q.e.d..

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI