PROBLEMAS PARA LOS MÁS JÓVENES (15)

Algunos problemas de las primeras Olimpiadas Balcánicas junior :

1.(1997, propuesto por Yugoslavia) Nueve puntos son interiores a un cuadrado de lado unidad. Probar que tres de ellos son los vértices de un triángulo cuya área no es mayor que 1/8.

2.(1997, propuesto por Chipre). Sea

$$k = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Expresar, en función de k,

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}.$$

3.(1998, propuesto por Yugoslavia). Las cifras del número N son, de izquierda a derecha, las siguientes: Las primeras 1997 cifras son iguales a 1; a continuación hay 1998 doses; finalmente, la cifra de las unidades es un 5.

Demostrar que N es un cuadrado perfecto.

4.(1999, propuesto por Grecia). El triángulo ABC es isósceles, con AB = AC. Sea D un punto del lado BC tal que

$$BC > BD > DC > 0.$$

Sean k_1 y k_2 los círculos circunscritos a ABD y ADC, respectivamente. Sea M el punto medio de $B'C'$, donde los puntos B' y C' se definen de la manera siguiente: BB' es un diámetro de k_1 y CC' es un diámetro de k_2.

Demostrar que el área del triángulo MBC no depende de la posición del punto D sobre el lado BC.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI