

PROBLEMA 41 (SOLUCION POR HENRY RAMIREZ- FUSM BOGOTA COLOMBIA)

Para todo $n \geq 1$, probar que:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C(n,k)} \right]^n \geq e^{(n+1)-2^n} \quad (1)$$

SOLUCION:

La desigualdad original (1) puede reescribirse como:

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C(n,k)} \right]^n \geq \frac{e^{(n+1)}}{e^{2^n}} \quad \text{con} \quad C(n,k) = \binom{n}{k}$$

La demostración se hará por inducción.

Para $n = 1$, se tiene:

$$\left[\frac{1 * 1}{1 * 1} \right]^1 \geq \frac{e^{1+1}}{e^{2^1}} = \frac{e^2}{e^2} = 1$$

De donde

$$1 \geq 1$$

Supóngase cierto el resultado para $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$

Debe probarse el resultado para $k = n$. Por la desigualdad media armónica – media aritmética tenemos que:

$$\frac{n}{\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{n}}} \leq \frac{\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}}{n} = \frac{2^n - 1}{n}$$

En donde se ha utilizado el Teorema del Binomio de Newton $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

con $x=y=1$; de donde $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$.

Es decir:

$$\frac{n}{\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \frac{1}{\binom{n}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{n}}} \leq \frac{2^n - 1}{n}$$

Reescribiendo:

$$\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}} \leq \frac{2^n - 1}{n}$$

Lo que implica que:

$$\frac{n}{2^n - 1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

Y de aquí que.

$$\left[\frac{n}{2^n - 1} \right]^n \leq \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \right]^n \quad (2)$$

Ahora bien; para $n=2$ se tiene que:

$$\left[\frac{2}{2^2 - 1} \right]^2 = \left[\frac{2}{2^2 - 1} \right]^2 = \frac{4}{9} \geq \frac{1}{e} = \frac{e^{2+1}}{e^{2^2}} = \frac{e^3}{e^4} = \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

pues $4e > 4(2.5) = 10 > 9$ (***) (A)

De forma similar se tiene que para $n=3$:

$$\left[\frac{3}{2^3 - 1} \right]^3 = \left[\frac{3}{2^3 - 1} \right]^3 = \frac{27}{343} \geq \frac{1}{e^4} = \frac{e^{3+1}}{e^{2^3}} = \frac{e^4}{e^8} = \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

lo cual es cierto pues $27e^4 > 27 * 2^4 = 432 > 343$.

Supóngase que $n \geq 4$

Consideremos la función $f(x) = x \ln x - x - 1$ en el intervalo $[4, \infty)$.

Tenemos que $f(4) = 4 \ln 4 - 4 - 1 = 4 \ln 4 - 5 \approx 0.545 > 0$

Además derivando se tiene que:

$$f'(x) = \ln x + x \left[\frac{1}{x} \right] - 1 = \ln x$$

Entonces:

$$f'(x) = \ln x > 0 \text{ para } x \in [4, \infty)$$

Entonces $f(x)$ es creciente en este intervalo, y como $f(4) > 0$, se tiene que $f(x) > 0$ en $[4, \infty)$

Por lo tanto:

$$f(x) = x \ln x - x - 1 > 0$$

En particular para $x = n$ natural ($n \geq 4$):

$$n \ln n - n - 1 > 0 \quad (B)$$

Lo que implica:

$$n \ln n \geq n + 1 \quad (3).$$

Tenemos además que:

$$2^n \geq n^2 \text{ para } n \geq 4 \quad (4)$$

lo cual se puede probar fácilmente por inducción.

Para $n = 4$:

$$2^4 = 16 \geq 16 = 4^2$$

Supóngase que el resultado es cierto para $k = 4, 5, 6, \dots, n$.

Por lo tanto:

$$2^n \geq n^2$$

Multiplicando esta desigualdad por 2, tenemos:

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \quad (5)$$

pero $(n-1)^2 \geq 2$ para $n \geq 4$. De donde:

$$n^2 - 2n + 1 \geq 2$$

$$n^2 - 2n - 1 \geq 0$$

$$n^2 \geq 2n + 1$$

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

sustituyendo esto en (5) obtenemos:

$$2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$$

Tenemos que:

$$e^n \geq 2^n \geq 2^n - 1 > 0 \quad \text{para } n \geq 4$$

La desigualdad se mantiene al tomar ln:

$$\ln e^n \geq \ln(2^n - 1)$$

de donde

$$n \geq \ln(2^n - 1)$$

Multiplicando por n se tiene:

$$n^2 \geq n \ln(2^n - 1) \quad (5)$$

Combinando esto con (4) resulta:

$$2^n \geq n^2 \geq n \ln(2^n - 1)$$

con lo que obtenemos la desigualdad:

$$2^n \geq n \ln(2^n - 1) \quad (6)$$

Ahora se suman miembro a miembro las desigualdades obtenidas en (3) y (6):

$$n \ln n \geq n + 1 \quad (3).$$

$$2^n \geq n \ln(2^n - 1) \quad (6)$$

Se tiene por lo tanto:

$$2^n + n \ln n \geq n \ln(2^n - 1) + n + 1 \quad (7)$$

podemos reescribir esta desigualdad como:

$$\ln e^{2^n} + n \ln n \geq n \ln(2^n - 1) + \ln e^{n+1}$$

$$\ln e^{2^n} + \ln n^n \geq \ln(2^n - 1)^n + \ln e^{n+1}$$

$$\ln \left[e^{2^n} n^n \right] \geq \ln \left[(2^n - 1)^n e^{n+1} \right]$$

lo que implica:

$$e^{2^n} n^n \geq (2^n - 1)^n e^{n+1}$$

de donde:

$$\frac{n^n}{(2^n - 1)^n} \geq \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}}$$

Es decir.:

$$\left[\frac{n}{2^n - 1} \right]^n \geq \frac{e^{n+1}}{e^{2^n}} \quad (8)$$

Combinando esto con la desigualdad (2) obtenemos:

$$\frac{e^{n+1}}{e^{2^n}} \leq \left[\frac{n}{2^n - 1} \right]^n \leq \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} \right]^n$$

Es decir :

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{C(n,k)} \right]^n \geq e^{(n+1)-2^n}$$

que es lo que se quería demostrar.

COMENTARIO.

De acuerdo a las desigualdades resaltadas (A) y (B) la desigualdad en realidad es estricta para $n > 2$. La igualdad se presenta en el caso $n=1$.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

