Problema 66

Si a y b son números positivos tales que $a^3+b^3=2$, demostrar que

$$a^9+b^9+5\left(a^{12}+b^{12}\right)\geq 8+2\left(a^{15}+b^{15}\right)$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Si ponemos $x=a^3$, $y=b^3$ entonces $x+y=2$ y, consiguientemente,

$$2^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$

de donde

$$x^2+y^2=4-2xy, \tag{1}$$

$$2^3=(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$$

de donde

$$x^3+y^3=8-6xy, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} 2^4=(x+y)^4 &= x^4+y^4+4xy\left(x^2+y^2\right)+6x^2y^2 \\ &= x^4+y^4+4xy(4-2xy)+6x^2y^2 \qquad \text{por (1)} \end{aligned}$$

de donde

$$x^4+y^4=16-16xy+2x^2y^2 \tag{3}$$

y

$$\begin{aligned} 2^5=(x+y)^5 &= x^5+y^5+5xy\left(x^3+y^3\right)+10x^2y^2(x+y) \\ &= x^5+y^5+5xy(8-6xy)+20x^2y^2 \qquad \text{por (2)} \end{aligned}$$

de donde

$$x^5+y^5=32-40xy+10x^2y^2 \tag{4}$$

Ahora, en función de x, y, la desigualdad propuesta se escribe

$$x^3+y^3+5\left(x^4+y^4\right)\geq 8+2\left(x^5+y^5\right)$$

que, habida cuenta de (2), (3) y (4) se convierte en

$$10x^2y^2+6xy-16\leq 0$$

cuya validez se establece inmediatamente sin más que tener en cuenta que siendo x, y números positivos de suma constante e igual a 2, el producto xy es máximo cuando dichos números son iguales, esto es:

$xy\leq 1$ verificándose la igualdad cuando $x=y=1$.

Entonces, en efecto,

$$10x^2y^2+6xy-16 \;\leq\; 10\cdot 1^2+6\cdot 1-16 \;=\; 0$$

y la demostración es completa.

Se verifica la igualdad si y sólo si $x=y=1$, es decir, sólo cuando $a=b=1$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI