Problema 69

Encontrar todos los números naturales x, y, z mayores que cero, tales que

$$1+2^x \cdot 3^y = z^2$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Pues z es impar, porque z^2 es impar, puede escribirse en la forma $2k+1$ donde k es un número natural igual o mayor que 1 y la ecuación dada se escribe entonces en la forma

$$2^{x-2} \cdot 3^y = k(k+1).$$

Uno de los números k y $k+1$ es par, luego debe ser $x-2 \geq 1$ y, habida cuenta que k y $k+1$ son primos entre sí por ser números consecutivos, resultan, por la unicidad de la descomposición de un número en producto de factores primos, los dos siguientes casos:

1. $2^{x-2} = k$ y $3^y = k+1$, de donde $3^y - 2^{x-2} = 1$.
   Pues las únicas soluciones (n, m) en números naturales mayores que cero de la ecuación $3^n - 2^m = 1$ son $(1,1)$ y $(2,3)$ [1, problema 5/155], obtenemos
   $$(y, x-2) = (1,1),\ (2,3)$$
   de donde
   $x = 3$, $y = 1$ que implican $z = 5$

   y

   $x = 5$, $y = 2$ que implican $z = 17$.

2. $2^{x-2} = k+1$ y $3^y = k$, de donde $2^{x-2} - 3^y = 1$.
   Pues la única solución (m, n) en números naturales mayores que cero de la ecuación $2^m - 3^n = 1$ es $(2,1)$ [1, problema 5/154], obtenemos $(x-2, y) = (2,1)$ de donde
   $x = 4$, $y = 1$ que implican $z = 7$.

Las soluciones pedidas son, pues, las tres siguientes:

$$(x, y, z) = (3,1,5),\ (4,1,7),\ (5,2,17)$$

Referencia.

1. W. Sierpinski, *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres,* Librairie Hachette, 1972.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI