PRIMERA SESIÓN DE PROBLEMAS

21 septiembre de 2004

Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Problema 3

Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\text{mcd}\,(a, n) = \text{mcd}\,(b, n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$

Duración: 4h. 30 m.
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

PRIMEIRA SESSÃO DE PROBLEMAS

21 de setembro de 2004

Problema 1

Deve-se colorir as casas de um tabuleiro de 1001? 1001 de acordo com as seguintes regras:

- Se duas casas têm um lado comum, então pelo menos uma delas deve ser colorida.
- De cada seis casas consecutivas de uma linha ou de uma coluna, devem colorir-se sempre pelo menos duas delas que sejam adjacentes.

Determinar o número mínimo de casas que devem ser coloridas.

Problema 2

Se considera no plano uma circunferência de centro O e raio r, e um ponto A exterior a ela. Seja M um ponto da circunferência e N o ponto diametralmente oposto a M. Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por A, M e N quando M varia.

Problema 3

Sejam n e k números inteiros positivos tais que n é ímpar ou n e k são pares. Provar que existem inteiros a e b tais que

$$\mathrm{mdc}\,(a, n) = \mathrm{mdc}\,(b, n) = 1 \quad \text{e} \quad k = a + b.$$

Duração: 4h 30m.
Cada problema vale sete pontos

Versão em português

SEGUNDA SESIÓN DE PROBLEMAS

22 septiembre de 2004

Problema 4

Determinar todas las parejas (a,b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a + b$ y $201a + b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Problema 5

Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente.

Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA',

B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y

C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.

Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Problema 6

Para un conjunto $\mathcal{H}$ de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un *punto de corte* de $\mathcal{H}$ si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en $\mathcal{H}$ tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

Dado un conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ de la siguiente manera: para cualquier j ? 0, $\mathcal{A}_{j+1}$ es la unión de $\mathcal{A}_j$ con el conjunto de todos los puntos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier j ? 1 se tiene que $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duración: 4h. 30 m.
Cada problema vale siete puntos

Versión en español

SEGUNDA SESSÃO DE PROBLEMAS

22 de setembro de 2004

Problema 4

Determinar todos os pares (a,b), onde a e b são números inteiros positivos de dois dígitos cada um, tais que $100a + b$ e $201a + b$ são quadrados perfeitos de quatro dígitos.

Problema 5

Dado um triângulo escaleno ABC, se designam por A', B' e C' os pontos de intersecção das bissectrizes interiores dos ângulos A, B e C com os lados opostos, respectivamente.

Sejam: A'' a intersecção de BC com a mediatriz de AA',

B'' a intersecção de AC com a mediatriz de BB' e

C'' a intersecção de AB com a mediatriz de CC'.

Provar que A'', B'' e C'' são colineares.

Problema 6

Para um conjunto $\mathcal{H}$ de pontos no plano, diz-se que um ponto P do plano é um *ponto de corte* de $\mathcal{H}$, se existem quatro pontos distintos A, B, C e D em $\mathcal{H}$ tais que as rectas AB e CD são distintas e se cortam em P.

Dado um conjunto finito $\mathcal{A}_0$ de pontos no plano, se constroi uma sucessão de conjuntos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \ldots$ da seguinte forma: para qualquer j ? 0, $\mathcal{A}_{j+1}$ é a união de $\mathcal{A}_j$ com o conjunto de todos os pontos de corte de $\mathcal{A}_j$.

Demonstrar que se a união de todos os conjuntos da sucessão é um conjunto finito, então para qualquer j ? 1 tem-se $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_1$.

Duração: 4h 30m.
Cada problema vale sete pontos

Versão em português

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI