Problema 4 (Revista OIM No. 1)
En los lados AB y AC del triángulo ABC se consideran puntos variables F y E, respectivamente, tales que

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EB} = a.$$

Si M es el punto de intersección de BE y CF, hallar el lugar geométrico del punto M.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Sean P el único punto del lado AB tal que $PA/PB = a/b$ y Q el único punto del lado AC tal que $QA/QC = a/c$. Entonces el lugar geométrico de M es el segmento PQ.

Es claro que P y Q pertenecen al lugar. Si M es cualquier punto interior del segmento PQ tracemos las rectas CM y BM y sean F y E sus puntos de intersección con AB y AC, respectivamente. Si los puntos F, P, A y B se proyectan desde M y se secciona el haz resultante con la recta AC, resultan los puntos C, Q, A, E. Como la razón doble de cuatro puntos es invariante por proyecciones y secciones se tiene que $(FPAB) = (CQAE)$, es decir

$$\frac{FA/FB}{PA/PB} = \frac{CA/CE}{QA/QE.}$$

Luego de sustituir $PA/PB = a/b$, $CA = b$ resulta

$$\begin{aligned}
\frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} &= \frac{b}{QA} \cdot \frac{QE}{EC} = \frac{b}{QA} \cdot \frac{QA - EA}{EC} = \frac{b}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \\
&= \frac{EA + EC}{EC} - \frac{b}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 + (1 - \frac{b}{QA})\frac{EA}{EC}.
\end{aligned}$$

Ahora bien, de $QA/QC = a/c$ se sigue $c/a = QC/QA = (b - QA)/QA$, de donde $1 - b/QA = -c/a$. Por tanto

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{FA}{FB} = 1 - \frac{c}{a} \cdot \frac{EA}{EC}$$

y finalmente

$$b \cdot \frac{FA}{FB} + c \cdot \frac{EA}{EC} = a.$$

Lo anterior muestra que todo el segmento PQ está contenido en el lugar.

Supongamos ahora que un punto M pertenece al lugar. Sean F y E las intersecciones de las rectas CM y BM con AB y AC, respectivamente, y sea M' la intersección de CM con PQ. Sea E' la intersección de BM' con AC. Entonces como M' pertenece también al lugar se deduce fácilmente que $E'A/E'C = EA/EC$, de donde $E' = E$ y M' debe estar en la recta BM, pero como también está en la recta CM debe ser $M' = M$. Esto prueba que no hay otros puntos en el lugar fuera de PQ.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI