Problema 14 (Revista OIM No. 3)
Los lados BC, CA, AB del triángulo ABC cortan a una recta arbitraria en D, E, F respectivamente. Demostrar que existe un punto P en esa recta tal que las áreas de los triángulos PAD, PBE y PCF son iguales.

Solución por José Heber Nieto, Maracaibo, Venezuela.

Tracemos la recta BE y una paralela r a AC por D. Sea M la intersección de r con BE, y tracemos una paralela s a AB por M. Sean N y P los puntos de intersección de s con las rectas AC y FD, respectivamente. Sean h, k y l las distancias desde A, B y C, respectivamente, a la recta FD. Es claro que

$$\frac{PD}{PE} = \frac{PM}{PN} = \frac{FB}{FA} = \frac{k}{h}.$$

Por lo tanto área$(PAD) = PD \cdot h/2 = PE \cdot k/2 =$ área(PBE). Análogamente

$$\frac{PE}{PF} = \frac{ME}{MB} = \frac{DC}{DB} = \frac{l}{k},$$

de donde área$(PBE) = PE \cdot k/2 = PF \cdot l/2 =$ área(PCF). Por lo tanto área$(PAD) =$ área$(PBE) =$ área(PCF) y el punto P cumple la condición pedida. Hay una segunda solución, a saber el conjugado armónico de P respecto a E, D.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI