Problema 71

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Para cualesquiera números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$, demostrar que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}senh(x_k)\right)^2\geq n^2$$

Respuesta:
Tratando el miembro izquierdo de la desigualdad como una diferencia de cuadrados que es, tenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}senh(x_k)\right)^2$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}senh(x_k)\right)\right]\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\cosh(x_k)\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}senh(x_k)\right)\right]$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}+e^{-x_k}}{2}\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}-e^{-x_k}}{2}\right)\right]\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}+e^{-x_k}}{2}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}-e^{-x_k}}{2}\right)\right]$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}e^{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}e^{-x_k}\right)$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev. Que plantea

$$Si\quad a_1\leq a_2\leq a_3\leq\ldots\leq a_n\quad y\quad b_1\geq b_2\geq b_3\geq\ldots\geq b_n$$

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n}\frac{(b_1+b_2+\ldots+b_n)}{n}\geq\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)}{n}$$

Que en el caso de nuestro problema, ordenando las x_i de menor a mayor sin pérdida de generalidad por el crecimiento de la función exponencial, queda la desigualdad de Chebyshev como sigue:

$$\frac{\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)}{n}\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right)}{n}\geq\frac{\left(e^{x_1}e^{-x_1}+e^{x_2}e^{-x_2}+\ldots+e^{x_n}e^{-x_n}\right)}{n}$$

$$\frac{\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)}{n}\frac{\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right)}{n}\geq\frac{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\ veces}}{n}=\frac{n}{n}=1$$

O lo que es lo mismo

$$\left(e^{x_1}+e^{x_2}+\ldots+e^{x_n}\right)\left(e^{-x_1}+e^{-x_2}+\ldots+e^{-x_n}\right)\geq n^2$$

Con lo que queda demostrada la desigualdad del problema 71.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI