Problema 72

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Resolver la ecuación

$$x^{2n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}(x^2-1)^k=0$$

Notemos que la ecuación se puede transformar en:

$$\binom{2n}{0}x^{2n}+\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}(x^2-1)^k=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(\sqrt{(x^2-1)}\right)^{2k}=0$$

Ahora por el binomio de Newton tenemos que:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^{2n-j}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^j$$

$$\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}x^{2n-j}(-1)^j\left(\sqrt{x^2-1}\right)^j$$

Y sumando miembro a miembro tenemos:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{2k}$$

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}x^{2(n-k)}\left(x^2-1\right)^{k}$$

Por tanto la ecuación se transforma en:

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}=0$$

Dividiendo por $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}$ teniendo en cuenta que $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\neq 0$ para todo x número complejo

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2n}}+1=0$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right)^{2n}+1=0$$

De donde se obtiene que $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j = e^{i\frac{p+2p\ j}{2n}}$, $j = 0,1,2,...,2n-1$ o sea una de las raíces de orden 2n de $-1 = e^{ip}$

Trabajemos entonces con la expresión $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j$ a la cual aplicándoles transformaciones equivalentes

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = w_j \Leftrightarrow x(w_j-1) = (w_j+1)\sqrt{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{w_j+1}{w_j-1}\sqrt{x^2-1} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2 (x^2-1)$$

O sea hemos llegado a que si x es solución de la ecuación entonces satisface

$$x^2 = \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2 (x^2-1) \quad (*)$$

Demostremos ahora que si x satisface dicha ecuación (*) entonces es solución de la ecuación del problema 72.
Si (*) entonces

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2(n-k)} \left(\sqrt{(x^2-1)}\right)^{2k} = 0$$

Se transforma en

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)} (x^2-1)^{n-k} (x^2-1)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)} (x^2-1)^n = 0$$

$$(x^2-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)} = 0$$

Pero como x satisface (*) entonces $x^2 - 1$ 0 y utilizando nuevamente el binomio de Newton tenemos:

$$2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^{2(n-k)}=\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}+1\right)^{2n}+\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}-1\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{w_j+1+w_j-1}{w_j-1}\right)^{2n}+\left(\frac{w_j+1-w_j+1}{w_j-1}\right)^{2n}$$

$$=\left(\frac{2w_j}{w_j-1}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{w_j-1}\right)^{2n}=\frac{(2w_j)^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}+\frac{2^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}$$

$$=\frac{2^{2n}}{(w_j-1)^{2n}}\left[(w_j)^{2n}+1\right]=0$$

Lo cual es totalmente cierto pues w_j es una de las raíces de orden 2n de -1.
Por lo que queda demostrado que las soluciones de la ecuación del problema 72 son las x que satisfacen (*)

$$x^2=\left(\frac{w_j+1}{w_j-1}\right)^2(x^2-1)$$

$$x^2=\frac{(w_j+1)^2}{4w_j}$$

Donde $w_j=e^{i\frac{p+2p\,j}{2n}},\ j=0,1,2,\dots,2n-1$

Por tanto

$$x=\frac{(w_j+1)\left(\sqrt{w_j}\right)^{-1}}{2}$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}\right)}+1\right)e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}}{2},\quad con\ k=0,1.\quad j=0,1,\dots,2n-1.$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}-kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

Pero al utilizar ángulos cotTerminal obtenemos:

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}-kp+2kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

$$x=\frac{\left(e^{i\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right)}+e^{-i\left(\frac{p+2p\,j}{4n}+kp\right)}\right)}{2}$$

$$x=i\cos\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right),\quad con\quad k=0,1.\quad j=0,1,\ldots,2n-1.$$

O sea las soluciones de la ecuación 72 son:

$$x=i\cos\left(\frac{p+2p\,j}{2n}+kp\right),\quad con\quad k=0,1.\quad j=0,1,\ldots,2n-1.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI