Problema 73
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España

Resolver la ecuación en diferencias

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1} \cdot u_n}, \quad n \geq 1$$

Con las condiciones iniciales $u_1 = 1, u_2 = a, \ a \neq -1, a \in R.$

Solución Problema 73

Utilizando la relación de recurrencia tenemos:

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{1 + u_{n+2} u_{n+1}} = \frac{\dfrac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1} u_n} - u_{n+1}}{1 + \dfrac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1} u_n} u_{n+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{u_{n+1} - u_n - u_{n+1} - (u_{n+1})^2 u_n}{1 + u_{n+1} u_n}}{\dfrac{1 + u_n u_{n+1} + (u_{n+1})^2 - u_n u_{n+1}}{1 + u_{n+1} u_n}}$$

$$= \frac{-u_n - (u_{n+1})^2 u_n}{1 + (u_{n+1})^2} = -u_n$$

O sea tenemos que $u_{n+3} = -u_n, \ \forall n \in \mathrm{N}^*$ (1)

Y como consecuencia: $u_{n+6} = -u_{n+3} = u_n, \ \forall n \in \mathrm{N}^*$ (2)

Como $u_3 = \dfrac{a-1}{1+a}$ por la recurrencia entonces decimos en virtud de (1), (2) y las condiciones iniciales que la solución de la ecuación en diferencias es:

$$u_n = \begin{cases} 1 & si \ n = 6k \\ a & si \ n = 6k+1 \\ \dfrac{a-1}{a+1} & si \ n = 6k+2 \\ -1 & si \ n = 6k+3 \\ -a & si \ n = 6k+4 \\ -\dfrac{a-1}{a+1} & si \ n = 6k+5 \end{cases}$$ cuando k es un número natural.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI