

#### Problema 4, OIM 1993

Sea ABC un triángulo equilátero, y  $\Gamma$  su círculo inscrito. Si D y E son puntos de AB y AC, respectivamente, tales que DE es tangente a  $\Gamma$ , probar que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1.$$

(Propuesto por España, original de Toshio Seimiya)

#### Solución de Seimiya

Sea I el incentro. Tracemos por I una paralela a BC, que corte a AB en P y a AC en Q.

Ya que  $\widehat{PIB} = \widehat{IBC} = \widehat{PBI}$ , resulta  $BP = PI$ .

Análogamente,  $IQ = QC$ .

Como los triángulos API y AQI son iguales,  $PI = IQ$  y  $AP = AQ$ .

Llamamos

$$a = BP = PI = IQ = QC.$$

Como  $\widehat{API} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ , resulta  $\widehat{PAI} = 30^\circ$ , luego

$$AP = 2 \cdot PI = 2a, \text{ y } AQ = 2a.$$

Sean

$$\widehat{DPI} = \widehat{EPI} = \alpha (= 60^\circ)$$

$$\widehat{PDI} = \widehat{IDE} = p$$

$$\widehat{IED} = \widehat{IEQ} = q.$$

Entonces se tiene

$$\alpha + p = \widehat{DIP} = 180^\circ$$

$$p + q = \widehat{DIE} = 180^\circ$$

$$q + \alpha = \widehat{EIQ} = 180^\circ$$

$$\widehat{DIP} + \widehat{DIE} + \widehat{EIQ} = 180^\circ$$

Sumando estas cuatro igualdades obtenemos

$$p + q + \alpha = 180^\circ,$$

luego por la segunda de las igualdades anteriores resulta

$$\widehat{DIE} = \alpha.$$

Por lo tanto, los siguientes triángulos son semejantes:

$$DPI \simeq DIE \simeq IQE.$$

Llamando entonces  $x = PD$ ,  $y = QE$ , de la semejanza entre DPI y QEI se deduce

$$\frac{PD}{QI} = \frac{PI}{QE} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{y} \Leftrightarrow xy = a^2 \quad (1)$$

Entonces tenemos

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{2a-x}{a+x} + \frac{2a-y}{a+y} = \frac{(2a-x)(a+y) + (2a-y)(a+x)}{(a+x)(a+y)},$$

pero de (1) obtenemos que el numerador de la última fracción vale

$$\begin{aligned} (2a-x)(a+y) + (2a-y)(a+x) &= 4a^2 + a(x+y) - 2xy \\ &= 2a^2 + a(x+y) \\ &= a^2 + a(x+y) + xy \\ &= (a+x)(a+y), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1. \blacksquare$$

*Solución obtenida durante el concurso, de Antonio Rojas León, medalla de oro en la Olimpiada.*

Sean  $A'$  el punto de tangencia de DE con la circunferencia  $\Gamma$ ;  $B'$  y  $C'$  los puntos de tangencia de AB y AC con  $\Gamma$ ;  $r$  el radio de  $\Gamma$  y O su centro;  $a$  el lado de ABC;  $x = C'D$ ,  $y = B'E$ .

Se verifican las igualdades  $A'D = C'D$ ,  $B'E = A'E$  por ser tangentes a la circunferencia desde un punto exterior.

Comparando áreas, se tiene:

$$[ABC] = [EOC] + [BOC] + [DOB] + [DOE] + [ADE];$$

esta igualdad se puede escribir como

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{1}{2}r\left(a + \frac{a}{2} + x + \frac{a}{2} + y + x + y\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} - y\right) \sin 60^\circ$$

o, en forma equivalente,

$$\frac{a^2}{4} = \frac{1}{2}a(x+y) + 3xy \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} - 2xy = xy + \frac{1}{2}a(x+y),$$

y sumando y restando  $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}a(x-y)$  resulta

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - y\right) + \left(\frac{a}{2} + y\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} + y\right),$$

es decir

$$BD \cdot AE + CE \cdot AD = BD \cdot CE,$$

que es precisamente

$$\frac{AD}{BD} + \frac{AE}{CE} = 1. \blacksquare$$

Sea  $ABC$  un triángulo equilátero y  $\Gamma$  su circunferencia inscrita. Si  $D$  y  $E$  son puntos de los lados  $AB$  y  $AC$ , respectivamente, tales que  $DE$  es tangente a  $\Gamma$ , probar que

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = 1$$

La demostración hace servir el siguiente resultado: si el ángulo  $A$  de un triángulo  $ABC$  es de  $60^\circ$ , entonces  $\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1$  (donde la notación es la habitual).

En efecto, si  $\angle A = 60^\circ$ , tenemos

$$\begin{aligned} a^2 = b^2 + c^2 - bc &\Leftrightarrow a^2 + bc = b^2 + c^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + bc + a(b+c) = b^2 + c^2 + a(b+c) \\ &\Leftrightarrow (a+b)(a+c) = b(a+b) + c(a+c) \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \end{aligned}$$

(Obsérvese que la relación  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$  es un resultado euclídeo).

Sea  $O$  el centro del triángulo equilátero y  $M$  el punto medio del lado  $AB$ . Si  $DE$  es tangente a  $\Gamma$  en  $T$  y corta a la circunferencia circunscrita a  $\triangle ABC$  en  $D'$  y  $E'$  (ver figura) resultan iguales los triángulos rectángulos  $OMA$  y  $OTD'$ ; por consiguiente,  $AM = D'T$ .

Habida cuenta de la igualdad de los segmentos de tangente  $DM$  y  $DT$ , resulta

$$AD = AM - DM = D'T - DT = DD'.$$

Análogamente,  $AE = EE'$ .

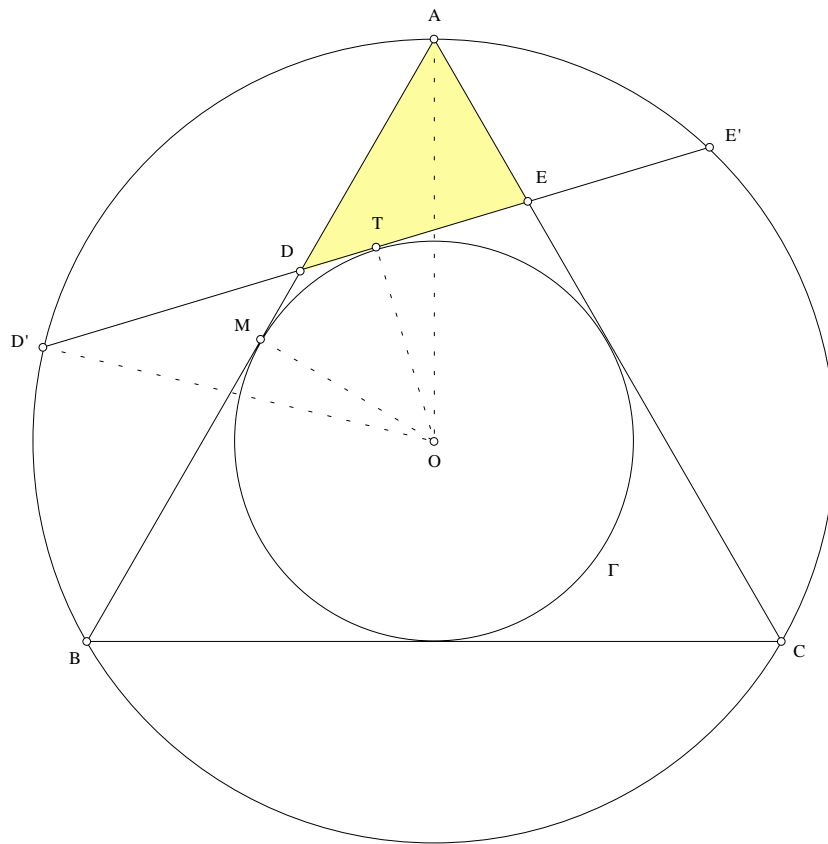
Los triángulos  $D'DA$  y  $BDE'$  son semejantes y siendo isósceles el primero, lo es también el segundo con  $DB = DE'$ .

Análogamente,  $EC = ED'$ .

Finalmente,

$$\frac{AD}{DB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DE'} + \frac{AE}{ED'} = \frac{AE}{DE + EE'} + \frac{AD}{ED + DD'} = \frac{AD}{DE + EA} + \frac{AE}{ED + DA} = 1$$

por aplicación del resultado arriba citado al triángulo  $ADE$  en el que  $\angle A = 60^\circ$ .



# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:



# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

