

Problema 74

Propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia

Encontrar todas las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que verifican las dos condiciones siguientes:

i) $f(xf(y)) = yf(x)$ para cualesquier x, y reales.

ii) El conjunto $\left\{ \frac{f(x)}{x} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\}$ es finito.

Solución de Daniel Lasasoa Medarde, Pamplona, España.

Tomando $x=0$ en la primera condición, se tiene que para todo y real $f(0)=yf(0)$, es decir, $f(0)=0$. Supongamos ahora que existe algún y no nulo tal que $f(y)=0$. Entonces, y para todo x , se tiene que

$$f(x) = \frac{f(xf(y))}{y} = \frac{f(0)}{y} = 0.$$

Luego o bien $f(x)=0$ para todo x , o $f(x)$ es no nulo para todo x no nulo. En el resto del problema asumiremos este segundo caso.

Haciendo $y=x$ en la condición i), se tiene que $xf(x)$ es punto fijo de f para todo x real, luego para cualesquiera x, y no nulos, se tiene

$$\begin{aligned} yf(x) &= f(xf(y)) = f\left(\frac{x}{y}yf(y)\right) = f\left(\frac{x}{y}f(yf(y))\right) = yf(y)f\left(\frac{x}{y}\right); \\ f(x) &= f(y)f\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Tomando $x=yz$, se tiene que $f(yz)=f(y)f(z)$ para cualesquiera y, z no nulos. Definimos ahora, para todo x no nulo, $g(x)=f(x)/x$. Luego

$$g(yz) = \frac{f(yz)}{yz} = \frac{f(y)}{y} \frac{f(z)}{z} = g(y)g(z).$$

Ahora bien, el conjunto de valores que toma $|g(x)|$ es finito por hipótesis del enunciado, luego posee máximo y mínimo positivos. Tomemos ahora y tal que $|g(y)|$ es máximo. Entonces $|g(z)| \leq 1$ para todo z , pues si no $|g(yz)| > |g(y)|$, que es absurdo. De la misma forma, tomando y tal que $|g(y)|$ es mínimo, se demuestra que $|g(z)| \geq 1$ para todo z , pues si no $|g(yz)| < |g(y)|$, igualmente absurdo. Luego $|g(x)|=1$ para todo x no nulo. Además, tomando $y=z$, se tiene que para todo y^2 positivo,

$$g(y^2) = [g(y)]^2 = 1,$$

es decir, $f(x)=x$ para todo x positivo. Tomemos ahora $z=-1$. Entonces,

$$g(-y) = g(y)g(-1),$$

luego o bien $g(-1)=-1$ y $f(x)=x$ para todo x , o bien $g(-1)=1$ y $f(x)=|x|$ para todo x . Pero esta segunda opción es absurda, como se comprueba tomando y negativo en la condición i) del enunciado, y por lo tanto las únicas soluciones son $f(x)=0$ para todo x , $f(x)=x$ para todo x .

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

