Problema 75

Propuesto por Wu Wei Chao, GuangZhou, China.

Dados dos números reales, a y c, con a distinto de 0, encontrar todas las funciones f:$R\to R$ que verifican

$$f\left(x+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+2axf\left(y\right)+f\left(x\right)-c, \qquad \text{para cualesquier } x, y \text{ reales.}$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Haciendo x=0, se obtiene de forma trivial que $f(0)=c$. Luego $f(x)=0$ para todo x real sólo si c=0, comprobándose por sustitución directa que si c=0, entonces $f(x)=0$ es efectivamente una solución posible. En caso de que $f(x)$ no sea idénticamente nula (independientemente de que c sea nulo o no), existe al menos un real y para el que $f(y)$ es no nulo, pudiéndose definir para cada real z un real u mediante

$$u=\frac{c-f\left(f\left(y\right)\right)+z}{2af\left(y\right)}.$$

Luego para cualesquiera y, z reales, con $f(y)$ no nulo, existe u real tal que

$$f\left(u+f\left(y\right)\right)=f\left(f\left(y\right)\right)+2auf\left(y\right)+f\left(u\right)-c=f\left(u\right)+z.$$

Por lo tanto, para cualesquiera x, z reales existen reales u y v tales que $f(v)-f(u)=z$, y

$$\begin{aligned}f\left(x+f\left(v\right)\right)&=f\left(f\left(v\right)\right)+2axf\left(v\right)+f\left(x\right)-c\\&=f\left(z+f\left(u\right)\right)+2axz+2axf\left(u\right)+f\left(x\right)-c\\&=f\left(f\left(u\right)\right)+2a\left(x+z\right)f\left(u\right)+f\left(x\right)+f\left(z\right)+2axz-2c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(x+f\left(v\right)\right)&=f\left(x+z+f\left(u\right)\right)\\&=f\left(f\left(u\right)\right)+2a\left(x+z\right)f\left(u\right)+f\left(x+z\right)-c;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\left(x+z\right)&=f\left(x+f\left(v\right)\right)-f\left(f\left(u\right)\right)-2a\left(x+z\right)f\left(u\right)+c\\&=f\left(x\right)+f\left(z\right)+2axz-c.\end{aligned}$$

La solución de esta última ecuación es sencilla tomando, sin pérdida de generalidad, $f(x)=ax^2+c+g(x)$, donde $g(x)$ es una función a hallarse. Entonces,

$$g\left(x+z\right)=f\left(x+z\right)-a\left(x+z\right)^2-c=f\left(x\right)+f\left(z\right)-ax^2-az^2-2c=g\left(x\right)+g\left(z\right).$$

Luego como este resultado se da para cualesquiera x, z reales, se tiene que $g(x)=bx$ para algún b real, y la solución general cuando $f(x)$ no es idénticamente nula es

$$f\left(x\right)=ax^2+bx+c, \ b \text{ real cualquiera,}$$

existiendo además la solución particular $f(x)=0$ para todo real x cuando c=0.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI