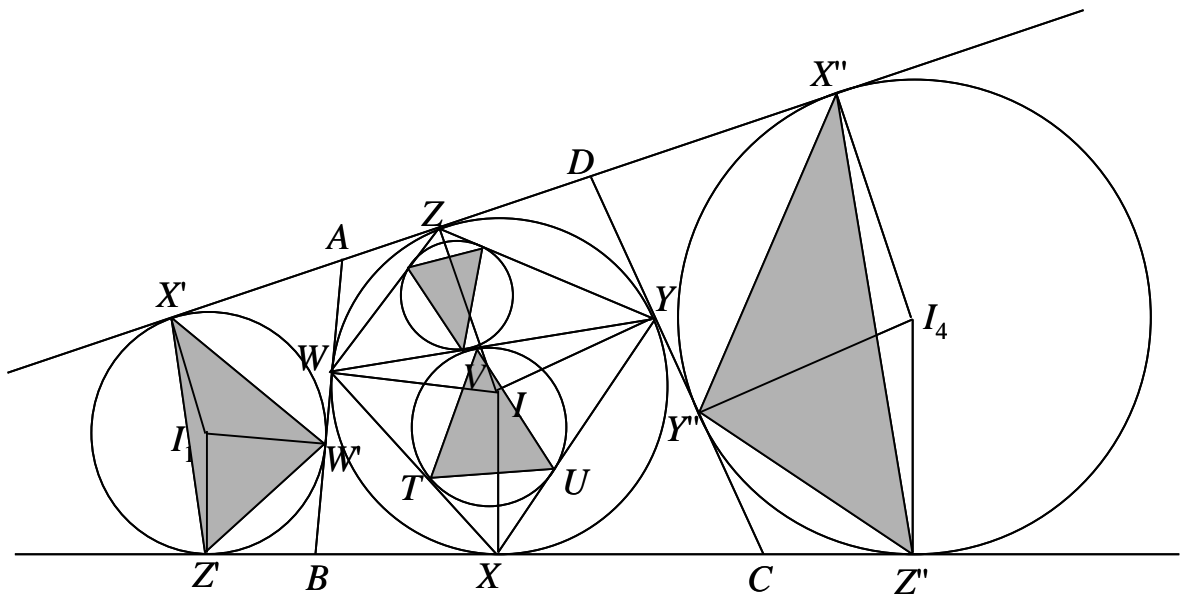


Problema 77

Propuesto por Juan Carlos Salazar, Puerto Ordaz, Venezuela.

Sea el cuadrilátero  $ABCD$  circunscrito a un círculo  $(I,r)$ . Los puntos de tangencia de este círculo con los lados  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  son  $W$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , respectivamente. Los círculos exinscritos  $(I_1,r_1)$ ,  $(I_4,r_4)$  correspondientes a los lados  $AB$  y  $CD$ , respectivamente, y los círculos inscritos  $(I_2,r_2)$ ,  $(I_3,r_3)$  en los triángulos  $WXY$  y  $WYZ$  determinan los triángulos tangenciales externos e internos correspondientes, de áreas  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Demostrar que

$$\frac{S_1}{r_1} + \frac{S_4}{r_4} = 2 \left( \frac{S_2}{r_2} + \frac{S_3}{r_3} \right).$$



Solución de Daniel Lasasa Medarde, Pamplona, España.

Sean  $X'$ ,  $W'$ ,  $Z'$  los puntos de tangencia del círculo  $(I_1,r_1)$  con las rectas  $AD$ ,  $AB$  y  $BC$ , respectivamente. Se tiene entonces que el área de  $X'W'Z'$  es  $S_1$ , siendo  $r_1$  el radio de su circunferencia circunscrita. Por lo tanto, utilizando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{W'X' \cdot W'Z' \cdot X'Z'}{4r_1^2} = 2r_1 \sin(\angle X'W'Z') \sin(\angle W'Z'X') \sin(\angle Z'X'W').$$

Ahora bien,

$$\angle X'W'Z' = p - \angle X'W'A - \angle Z'W'B = p - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C+D}{2},$$

donde se ha utilizado que los triángulos  $WAX'$  y  $W'BZ'$  son isósceles en  $A$  y  $B$ , respectivamente, siendo  $\angle WAX' = p - A$ ,  $\angle W'BZ' = p - B$ , donde los ángulos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son los ángulos  $\angle DAB$ ,  $\angle ABC$ ,  $\angle BCD$  y  $\angle CDA$ , respectivamente. Al ser  $I_1$  el centro de la

circunferencia circunscrita a  $X'W'Z'$ , y ser  $I_1X'$  e  $I_1W'$  perpendiculares a las rectas  $AD$  y  $BC$ , respectivamente, se comprueba que

$$\angle X'I_1Z' = 2\angle X'W'Z' = C + D; \quad \angle I_1X'Z' = \angle I_1Z'X' = \frac{p - \angle X'I_1Z'}{2} = \frac{A+B}{2} - \frac{p}{2};$$

$$\angle I_1X'W' = \frac{p}{2} - \angle W'X'A = \frac{p}{2} - \frac{A}{2}; \quad \angle W'X'Z' = \angle W'X'I_1 + \angle I_1X'Z' = \frac{B}{2}.$$

$$\angle I_1Z'W' = \frac{p}{2} - \angle W'Z'B = \frac{p}{2} - \frac{B}{2}; \quad \angle W'Z'X' = \angle W'Z'I_1 + \angle I_1Z'X' = \frac{A}{2}.$$

Por lo tanto, se llega finalmente a:

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{W'X' \cdot W'Z' \cdot X'Z'}{4r_1^2} = 2r_1 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right).$$

Ahora bien, es conocido que  $BW=AW'$ , ya que si  $P$  es el punto donde confluyen las rectas  $AD$  y  $BC$ , se tiene que

$$PA - AW' = PX' = PZ' = PB - BW' = PB - AB + AW'; \quad AW' = \frac{PA + AB - PB}{2};$$

$$PB + BW = PX = PZ = PA + AW = PA + AB - BW; \quad BW = \frac{PA + AB - PB}{2}.$$

Ahora bien, llamando  $(I, r)$  a la circunferencia inscrita en  $ABCD$ , al ser  $IZ$  perpendicular a  $AD$ , siendo  $IA$  la bisectriz del ángulo  $A$ , se tiene

$$r = BW \tan(\angle IBW) = \tan\left(\frac{B}{2}\right); \quad r_1 = AW' \tan(\angle I_1AW') = BW \tan\left(\frac{p-A}{2}\right);$$

$$r_1 = \frac{r}{\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right)};$$

$$\frac{S_1}{r_1} = 2r \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right)} = 2r \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right).$$

Por simetría, se tiene que

$$\frac{S_4}{r_4} = 2r \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{D}{2}\right).$$

Pero al ser  $2p$  la suma de los ángulos de  $ABCD$ , se llega finalmente a:

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{r_1} + \frac{S_4}{r_4} &= 2r \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{D}{2}\right) \right] \\
&= r \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \right] \\
&= r \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + r \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \\
&= \frac{r}{2} [\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) + \sin(D)].
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el triángulo tangencial interior del triángulo  $WXY$ . Al ser los triángulos  $ZAW$ ,  $WBX$ ,  $XCY$ ,  $YDZ$  isósceles en  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , respectivamente, se tiene

$$\angle ZWX = p - \angle ZWA - \angle XWB = p - \frac{p-A}{2} - \frac{p-B}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

De la misma forma,

$$\angle WXY = \frac{B+C}{2}; \quad \angle XYZ = \frac{C+D}{2}; \quad \angle YZW = \frac{A+D}{2}.$$

Además, por ser  $WXYZ$  cíclico, se tiene

$$\angle WYX = \angle WZX; \quad \angle XWY = \angle XZY; \quad \angle YWZ = \angle YXZ; \quad \angle ZXW = \angle ZYW.$$

Luego como

$$\angle WXY = \angle WXZ + \angle YXZ = \frac{B+C}{2},$$

y de forma similar para los otros tres ángulos del cuadrilátero  $WXYZ$ , podemos establecer un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que produce

$$\angle XWY = \frac{A}{2}; \quad \angle WYX = \frac{D}{2}.$$

Sean ahora  $T$ ,  $U$ ,  $V$  los puntos de tangencia del círculo  $(I_2, r_2)$  sobre los lados  $WX$ ,  $XY$ ,  $YZ$ , respectivamente. Por ser los triángulos  $TXU$ ,  $UYV$ ,  $VWT$  isósceles en  $X$ ,  $Y$ ,  $W$  respectivamente, se tiene

$$\angle TUV = p - \angle TUX - \angle VUY = p - \frac{p - \angle TXU}{2} - \frac{p - \angle UYV}{2} = \frac{B+C+D}{4} = \frac{p}{2} - \frac{A}{4}.$$

De la misma forma se obtiene

$$\angle VTU = \frac{p}{2} - \frac{D}{4}; \quad \angle UVT = \frac{A+D}{4}.$$

Por lo tanto, se tiene finalmente que

$$\frac{S_2}{r_2} = \frac{TU \cdot UV \cdot VT}{4r_2^2} = 2r_2 \sin\left(\frac{A+D}{4}\right) \cos\left(\frac{A}{4}\right) \cos\left(\frac{D}{4}\right).$$

Ahora bien, por ser  $r_2$  el radio de la circunferencia inscrita a  $WXY$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{\tan\left(\frac{A}{4}\right)} + \frac{r_2}{\tan\left(\frac{D}{4}\right)} &= \frac{r_2}{\tan\left(\frac{\angle XWY}{2}\right)} + \frac{r_2}{\tan\left(\frac{\angle XYW}{2}\right)} = WY = 2r \sin(\angle WXY) \\ &= 2r \sin\left(\frac{B+C}{2}\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{r} &= 2 \frac{\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \tan\left(\frac{A}{4}\right) \tan\left(\frac{D}{4}\right)}{\tan\left(\frac{A}{4}\right) + \tan\left(\frac{D}{4}\right)} = 2 \frac{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right) \tan\left(\frac{A}{4}\right) \tan\left(\frac{D}{4}\right)}{\tan\left(\frac{A+D}{4}\right) \left[1 - \tan\left(\frac{A}{4}\right) \tan\left(\frac{D}{4}\right)\right]} \\ &= 4 \frac{\cos^2\left(\frac{A+D}{4}\right) \sin\left(\frac{A}{4}\right) \sin\left(\frac{D}{4}\right)}{\cos\left(\frac{A}{4}\right) \cos\left(\frac{D}{4}\right) - \sin\left(\frac{A}{4}\right) \sin\left(\frac{D}{4}\right)} = 4 \cos\left(\frac{A+D}{4}\right) \sin\left(\frac{A}{4}\right) \sin\left(\frac{D}{4}\right). \end{aligned}$$

Introduciendo este resultado en la anterior igualdad para  $S_2/r_2$ , se tiene finalmente:

$$\frac{S_2}{r_2} = r \sin\left(\frac{A+D}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{D}{2}\right).$$

De forma enteramente análoga, se obtiene también

$$\frac{S_3}{r_3} = r \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right),$$

y de aquí se consigue finalmente

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{S_2}{r_2} + \frac{S_3}{r_3}\right) &= 2r \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \left[ \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{D}{2}\right) + \sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \right] \\ &= r \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{A-D}{2}\right) - \cos\left(\frac{A+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \right] \\ &= r \sin\left(\frac{A+D}{2}\right) \cos\left(\frac{A-D}{2}\right) + \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\ &= \frac{r}{2} \left[ \sin(A) + \sin(D) + \sin(B) + \sin(C) \right] = \frac{S_1}{r_1} + \frac{S_4}{r_4}, \end{aligned}$$

q.e.d..

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

