Problema 79

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Probar que si k y n son enteros $n\geq 2$, $1\leq k<n$, entonces

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^2 \leq \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España.

Se obtiene de forma trivial que:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{k+1}{n-k}; \qquad \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k};$$

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}\frac{k+1}{n-k} = \frac{(n-k)k+(n-k)+k+1}{k(n-k)} = 1+\frac{n+1}{k(n-k)}.$$

Además, es trivial, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, que

$$k(n-k) \leq \left(\frac{(n-k)+k}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4},$$

de donde se llega finalmente a que

$$\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k+1}\binom{n}{k-1}} = 1+\frac{n+1}{k(n-k)} \geq 1+\frac{4(n+1)}{n^2} = 1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2} = \left(1+\frac{2}{n}\right)^2,$$

q.e.d., dándose la igualdad si y sólo si $k=n-k$, al haberse aplicado la desigualdad entre sus medias aritmética y geométrica, o lo que es lo mismo, dándose la igualdad si y solamente si $n=2k$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: