

Problema 80

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España.

Caracterizar el triángulo tal que sus medianas y el inverso de sus alturas correspondientes son proporcionales.

Solución de Daniel Lasasosa Medarde, Pamplona, España.

Si son proporcionales sus medianas y el inverso de sus alturas correspondientes, también lo serán los cuadrados de las mismas, es decir, llamando h_a , h_b , h_c a las longitudes de las alturas desde los vértices A , B y C , y m_a , m_b , m_c a las longitudes de las medianas desde A , B y C , respectivamente, se tiene que la condición del enunciado se puede escribir como

$$m_a^2 h_a^{-2} = m_b^2 h_b^{-2} = m_c^2 h_c^{-2},$$

$$\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \frac{S^2}{4a^2} = \left(\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) \frac{S^2}{4b^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) \frac{S^2}{4c^2},$$

donde se ha aplicado el teorema de la mediana, y S es la superficie del triángulo.

Simplificando la anterior ecuación, se tiene:

$$\frac{S^2}{8} \left(\frac{b^2 + c^2}{a^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{S^2}{8} \left(\frac{c^2 + a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{S^2}{8} \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2} - \frac{1}{2} \right);$$
$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{c^2 + a^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}.$$

De la primera igualdad se deduce

$$0 = a^4 - b^4 + a^2 c^2 - b^2 c^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2),$$

es decir, $a^2 = b^2$, o $a = b$. De la segunda y de forma similar se deduce que $b = c$. Luego el triángulo considerado es equilátero.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

