Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de 1001×1001 de acuerdo a las reglas siguientes:

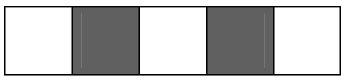
- Si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear.
- De cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

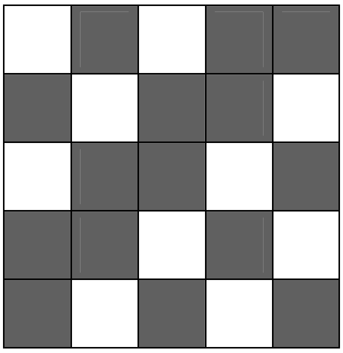
La primera condición exige que no haya dos casillas adyacentes sin colorear, pues ambas comparten un lado, y entonces al menos una de ellas debe estar coloreada.

Supongamos que en una fila o columna hay cinco casillas consecutivas tales que sólo dos están coloreadas. Por la primera condición del problema, no puede haber dos blancas consecutivas, luego la única posible configuración es la siguiente:



Pero entonces, añadamos una casilla blanca o coloreada sea a la derecha, sea a la izquierda, obtenemos un grupo de seis casillas de forma que no hay dos adyacentes coloreadas. Luego de cada cinco casillas, un mínimo de tres deben estar coloreadas para que se puedan satisfacer las condiciones del problema.

Se ahora el cuadrado 1001×1001 del enunciado. Podemos dividirlo en 1001 filas, dividiendo además cada fila en 200 grupos disjuntos de cinco casillas consecutivas, más una última casilla, que pertenece al la columna 1001 del cuadrado. En cada una de estas filas se tiene entonces que hay un mínimo de $3\times200=600$ casillas coloreadas, para un total de 600600 casillas coloreadas en las 1000 primeras columnas. Ahora bien, podemos dividir la última columna en 200 grupos de cinco casillas consecutivas, dejando la casilla inferior derecha del cuadrado aparte. De las 1000 casillas consideradas, al menos 600 deben estar coloreadas (3 en cada uno de los 200 grupos disjuntos de 5 casillas en los que podemos dividirlas), para un total de 601200 casillas coloreadas en todo el cuadrado. El número mínimo de casillas coloreadas debe ser entonces mayor o igual que 601200. Sea ahora la siguiente configuración de 25 casillas:

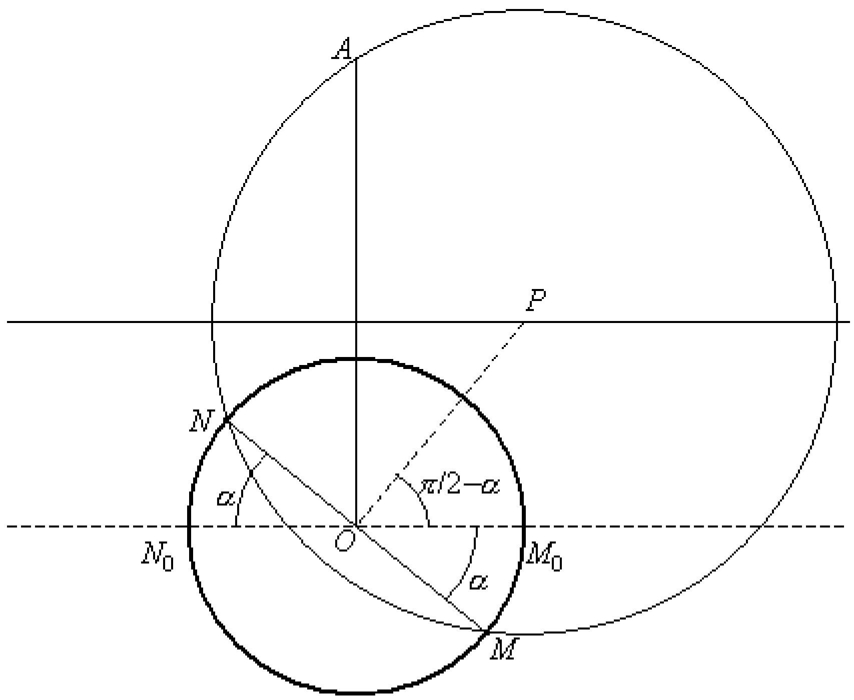


Sea ahora un cuadrado 1005×1005, que dividimos en 201^2 cuadrados disjuntos 5×5, coloreando cada uno de ellos como el de la figura. Obviamente, la primera condición se respeta en todo el cuadrado, ya que no hay dos casillas blancas adyacentes. La segunda condición también se cumple, pues cada fila o columna es la sucesión de grupos de la forma ...11010110101101011..., donde 1 representa una casilla coloreada y 0 una casilla blanca, y en los que por lo tanto para cada seis casillas consecutivas hay dos adyacentes coloreadas. Eliminemos ahora del cuadrado así coloreado las últimas cuatro filas y columnas. Se tiene entonces que hay 200^2 cuadrados como el mostrado, cada uno de ellos con 15 cuadrados coloreados, mientras que la última fila y última columna están formadas por la sucesión 01011 repetida 200 veces (para un total de 1200 cuadrados coloreados adicionales), estando la casilla de la esquina inferior derecha blanca (coincidiendo con la casilla superior izquierda de un cuadrado como el mostrado). Por lo tanto, se ha mostrado como colorear un cuadrado 1001×1001, cumpliendo las normas del enunciado, y coloreando exactamente 601200 casillas, que por lo tanto es el número mínimo de casillas que deben colorearse.

Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro O y radio r y un punto A exterior a ella. Sea M un punto de la circunferencia y N el punto diametralmente opuesto a M. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por A, M y N al variar M.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Sea $h>r$ la distancia entre O y A, sea P el centro de la circunferencia que pasa por A, M y N y sea M_0N_0 el diámetro perpendicular a OA. Obviamente, el triángulo M_0AN_0 es isósceles en A, ya que la recta OA es la perpendicular a la cuerda M_0N_0 por su punto medio, y por lo tanto su mediatriz, con lo que $AM_0=AN_0$. Supongamos ahora que $a=\angle MOM_0$. Es obvio que, por simetría en el enunciado del problema entre M y N, nos basta con considerar los casos en los que $-p/2<a<p/2$, ya que además en el caso en que $a=p/2$, A, M y N están alineados sobre la recta OA, con lo que no se puede definir el centro de una circunferencia que pase por estos tres puntos. Como P debe estar en la mediatriz de MN, que pasa por O, se tiene que OP y MN son perpendiculares, como también lo son OA y M_0N_0. Por lo tanto, el ángulo que forma OP con M_0N_0 es $p/2-a$, y

el ángulo que forma OP con OA es a. Entonces, la distancia de P a la recta M_0N_0 viene dada por $OP\cos(a)$, a la vez que, por el teorema del coseno, se tiene que

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2OA\cdot OP\cos(a).$$

Pero por ser P el centro de la circunferencia que pasa por A, M y N, se tiene que $AP=PM=PN$, y al ser OP perpendicular a ON, se tiene que $PN^2=OP^2+ON^2$, siendo $ON=r$ el radio de la circunferencia inicialmente dada. Por lo tanto,

$$OP\cos(a) = \frac{OA^2+OP^2-AP^2}{2OA} = \frac{h^2+OP^2-PN^2}{2h} = \frac{h^2-r^2}{2h}.$$

Ahora bien, esta cantidad, que como hemos dicho antes es la distancia del punto P a la recta M_0N_0, es independiente de la elección de M, ya que depende únicamente de la distancia $h=OA$ y del radio r de la circunferencia inicial. Además, considerando que P debe estar en las mediatrices de MN, AM y AN, es obvio que A y P están en el mismo semiplano de los dos determinados por la recta M_0N_0. Luego para cualquier M elegido, P está en una recta paralela a la M_0N_0 (por ser la distancia de P a esta recta independiente de la elección de M) y en el mismo semiplano que A de los determinados por la recta M_0N_0. Obviamente, la distancia entre la recta que contiene a P y la recta M_0N_0 es igual a la distancia OP cuando la recta OP es perpendicular a M_0N_0, es decir, cuando $a=0$, y por lo tanto dicha distancia es igual a $(h^2-r^2)/(2h)$.

Sea ahora P' un punto cualquiera de dicha recta, y tracemos el diámetro $M'N'$ perpendicular a OP'. Por los resultados anteriores, el centro de la circunferencia circunscrita a $AM'N'$ está en la recta OP', y está a una distancia de la recta M_0N_0 igual a la distancia entre P' y la recta M_0N_0, y en el mismo semiplano de los dos determinados por la recta M_0N_0. Luego el centro de dicha circunferencia coincide con P', y todo punto de la recta considerada es una posición de P para algún M.

Luego el lugar geométrico de P es una recta paralela a la recta M_0N_0 situada en el mismo semiplano con respecto a A de los dos determinados por M_0N_0, y siendo $(h^2-r^2)/(2h)$ la distancia entre ambas rectas, donde h es la distancia OA.

Problema 3

Sean n y k enteros positivos tales que o bien n es impar, o bien n y k son pares. Probar que existen enteros a y b tales que

$$\operatorname{mcd}(a,n)=\operatorname{mcd}(b,n)=1 \qquad \text{y} \qquad k=a+b\,.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea n un entero positivo cualquiera, y sea $k=cn+k'$, con $k'\in\{0,1,...,n-1\}$. Si podemos encontrar enteros a' y b tales que mcd(a',n)=mcd(b,n)=1, $k'=a'+b$, sea $a=cn+a'$. Entonces, $k=a+b$, siendo además mcd(a,n)=mcd(a',n)=1 pues n divide a $a-a'$. Por lo tanto, basta con demostrar el resultado pedido para $k=0,1,...,n-1$, es decir, para los restos módulo n. Adicionalmente, si n es par, entonces k también debe serlo, y si n y k son pares, también lo es k', luego en el caso en que n sea par, nos basta con demostrar el resultado del enunciado para $k=0,2,...,n-2$, es decir, para los restos pares módulo n.

Sea n una potencia positiva de un primo impar p, es decir, sea $n=p^u$ para $u\geq 1$. Sea ahora el conjunto ordenado $B_v=\{(v-1)p-1,(v-1)p-1,(v-1)p+1,(v-1)p+2,...,vp-2\}$, donde $v=1,2,...,p^{u-1}$, y sea el conjunto ordenado $A=\{1,2,1,1,1,...,1\}$. La suma de los elementos de A y los de B_v genera el conjunto $\{(v-1)p,(v-1)p+1,(v-1)p+2,(v-1)p+3,...,vp-1\}$, siendo obviamente cada elemento de A y de B_v primo con p. La unión de todos estos conjuntos generados por la suma ordenada de los elementos de A y B_v para $v=1,2,...,p^{u-1}$ es entonces $\{0,1,2,...,p^u-1\}$, es decir, la suma ordenada de los elementos de A y de B_v recorre todos los posibles valores de k' al recorrer v el conjunto de valores $\{1,2,...,p^{u-1}\}$, siendo cada elemento de A y cada elemento de B_v primo con n, quedando entonces el resultado del enunciado demostrado para todo n que sea potencia de primo impar.

Sea ahora n una potencia de 2. Al ser n par, k también debe ser par. Sea entonces $a=1,1,1,1,...,1$, y $b=-1,1,3,5,...,n-3$. Obviamente, al ser todos los valores de a y b impares, son primos con n, siendo sus respectivas sumas iguales a $0,2,4,6,...,n-2$, es decir, todos los restos pares módulo n. Luego el resultado pedido queda probado también para todo n que sea potencia de 2.

Sea ahora $n=n'n''$ con n' y n'' primos entre sí, y tales que el resultado del enunciado se cumple para n' y para n''. Sea ahora $k\in\{0,1,...,n-1\}$. Sean $k'\in\{0,1,...,n'-1\}$ y $k''\in\{0,1,...,n''-1\}$ tales que $k\equiv k'$ (mod n') y $k\equiv k''$ (mod n''). Si n es par, entonces n' o n'' es par, pero no ambos (pues son primos entre sí). Supongamos sin pérdida de generalidad que n' es par. Entonces como k es par, su resto al dividir por un número par n' también es par, y k' es par. Sean entonces ahora a',b' primos con n', y sean a'',b'' primos con n'', tales que $k'=a'+b'$, $k''=a''+b''$, cuya existencia está garantizada por cumplirse el enunciado para n' y n''. Sean ahora a, b en $\{0,1,...,n-1\}$ tales que $a\equiv a'$ (mod n'), $a\equiv a''$ (mod n''), $b\equiv b'$ (mod n') y $b\equiv b''$ (mod n''}, que por el teorema chino del resto existen y son únicos. Además, es evidente que a es primo con n' y n'', al ser sus restos iguales a a' y a'' respectivamente, siendo también b primo con n' y n'', al ser sus restos respectivos iguales a b' y b''. Luego a y b son primos con $n=n'n''$, al ser primos con n' y n''. Entonces, $a+b\equiv k'$ (mod n'), siendo además $a+b\equiv k''$ (mod n''), con lo que $a+b\equiv k$ (mod n). Sumando o restando un número entero de veces n de a si fuere necesario (con lo que el resultado de la operación seguiría siendo primo con n), se demuestra que el enunciado se cumple para $n=n'n''$ siempre que se cumpla para n' y n'' primos entre sí.

Demostramos ahora que el enunciado se cumple para todo n por inducción sobre el número m de primos distintos que dividen a n. Si $m=1$, entonces n es primo o potencia de primo, en cuyo caso ya se ha demostrado que el enunciado se cumple. Supongamos ahora (hipótesis de inducción) que el enunciado se cumple para valores de n divisibles por exactamente $1,2,3,...,m$ primos distintos. Sea ahora n divisible por exactamente $m+1$ primos distintos. Podemos entonces factorizarlo en producto de $m+1$ potencias de primos distintos. Agrupando m de estas, se puede entonces escribir n como el producto de una potencia de primo n' multiplicada por otro número, n'', que es divisible por exactamente m primos distintos, cumpliendo por lo tanto n' y n'' el enunciado por hipótesis de inducción, y siendo primos entre sí. Luego por el resultado anteriormente demostrado, el enunciado también se cumple para $n=n'n''$ divisible por $m+1$ primos distintos. Luego el enunciado se cumple para todo n, q.e.d..

Problema 4

Determinar todas las parejas (a,b), donde a y b son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que $100a+b$ y $201a+b$ son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Llamemos $x^2=100a+b$, $y^2=201a+b$, donde x e y son obviamente enteros de dos dígitos, pues x^2 e y^2 son cuadrados perfectos de cuatro dígitos. Podemos elegir sin pérdida de generalidad x e y como positivos. Tenemos:

$$(y+x)(y-x)=y^2-x^2=101a\,.$$

Ahora bien, 101 es primo, pues da restos 1, 2, 1 y 3 al dividirlo por 2, 3, 5 y 7, los únicos primos menores o iguales que su raíz cuadrada. Por lo tanto, 101 divide bien a $y+x$, bien a $y-x$. Supongamos que 101 divide a $y-x$. Entonces,

$$a=\frac{(y+x)(y-x)}{101}\geq y+x\,.$$

Pero entonces $a\geq y+x>y-x\geq 101$, que es absurdo pues a tiene dos dígitos. Luego 101 divide a $y+x$. Ahora bien, como tanto y como x son números de dos dígitos (pues sus cuadrados respectivos tienen cuatro dígitos), su suma no puede ser mayor que $198=2\cdot 99<202$, luego $y+x=101$, y $a=y-x$, y tenemos entonces

$$y=\frac{101+a}{2}\,; \qquad (101+a)^2=804a+4b\,; \qquad a^2-602a+101^2-4b=0\,;$$

$$a=\frac{602\pm\sqrt{602^2-202^2+16b}}{2}=301\pm 2\sqrt{20100+b}\,.$$

Ahora bien, a es entero, con lo que el radicando debe ser un cuadrado perfecto, y al ser $141^2=19881$, $142^2=20164$, $143^2=20449$, y ser b un entero positivo de dos dígitos, se tiene que necesariamente $b=64$. Al ser a un entero positivo de 2 dígitos, podemos descartar la mayor de las dos raíces, que tendría tres dígitos, para encontrar que $a=301-2\cdot 142=17$. Luego por lo tanto $(17,64)$ es la única solución posible.

Nótese que $100a+b=1764=42^2$, $201a+b=3481=59^2$, siendo la suma de las raíces de ambos cuadrados perfectos 101, y su diferencia $17=a$, tal y como habíamos demostrado que debía suceder.

Problema 5

Dado un triángulo escaleno ABC, se llaman A', B' y C' a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos A, B y C con los lados opuestos, respectivamente.

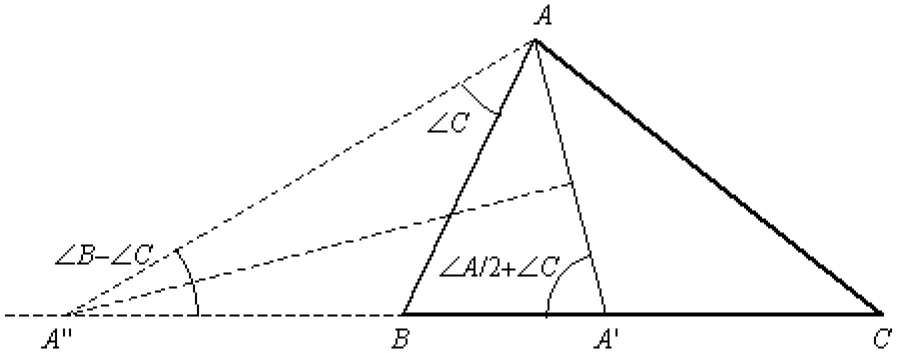
Sean: A'' la intersección de BC con la mediatriz de AA',

B'' la intersección de AC con la mediatriz de BB' y

C'' la intersección de AB con la mediatriz de CC'.

Probar que A'', B'' y C'' son colineales.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Cualquier punto de la mediatriz de AA' equidista de A y de A'. En particular, $AA''=A'A''$. Luego $AA'A''$ es isósceles en A''.

Es obvio que

$$\angle AA'B = p - \angle BAA' - \angle ABA' = p - \frac{\angle A}{2} - \angle B = \frac{\angle A}{2} + \angle C \ .$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\angle B > \angle C$. Entonces, $\angle AA'B < p/2$, y A'' está en la semirrecta de origen A' que pasa por B, y al estar A' en el interior de BC, A'' está en la semirrecta de origen C que pasa por B. Ahora bien, al ser $AA'A''$ isósceles en A'', se tiene que

$$\angle A''AB = \angle A''AA' - \angle BAA' = \angle AA'A'' - \angle A/2 = \angle C \ ;$$

$$\angle A''AC = \angle A''AB + \angle BAC = \angle C + \angle A = p - \angle B \ ;$$

$$\angle AA''B = \angle AA''C = \angle AA''A' = p - 2\angle AA'A'' = p - \angle A - 2\angle C = \angle B - \angle C \ .$$

Por lo tanto, aplicando el teorema del seno, se tiene

$$\frac{A''B}{\sin(\angle C)}=\frac{A''B}{\sin(\angle A''AB)}=\frac{AB}{\sin(\angle AA''B)}=\frac{AB}{\sin(\angle B-\angle C)};$$

$$\frac{A''C}{\sin(\angle B)}=\frac{A''C}{\sin(\angle A''AC)}=\frac{AC}{\sin(\angle AA''C)}=\frac{AC}{\sin(\angle B-\angle C)};$$

$$\frac{A''C}{A''B}=\frac{AC\sin(\angle B)\sin(\angle B-\angle C)}{AB\sin(\angle C)\sin(\angle B-\angle C)}=\frac{AC^2}{AB^2}.$$

Nótese que la demostración es enteramente análoga por simetría en el caso en que $\angle C>\angle B$. Rotando cíclicamente *A*, *B* y *C* llegamos a que:

$$\frac{B''A}{B''C}=\frac{BA^2}{BC^2}; \qquad \frac{C''A}{C''B}=\frac{CA^2}{CB^2}.$$

Se tiene entonces finalmente que

$$\frac{AB''}{B''C}\cdot\frac{CA''}{A''B}\cdot\frac{BC''}{C''A}=\frac{BA^2}{BC^2}\cdot\frac{AC^2}{AB^2}\cdot\frac{CB^2}{CA^2}=1.$$

Ahora bien, *A''* está en el exterior del segmento *BC*, pues $\angle AA''C<\angle ABC$, y por rotación cíclica de *A*, *B* y *C*, *B''* y *C''* están respectivamente en el exterior de los segmentos *AC* y *AB*. Luego por el recíproco del teorema de Menelao se tiene que *A''*, *B''* y *C''* son colineales, q.e.d..

Problema 6

Para un conjunto H de puntos en el plano, se dice que un punto P del plano es un punto de corte de H si existen cuatro puntos distintos A, B, C y D en H tales que las rectas AB y CD son distintas y se cortan en P.

Dado un conjunto finito A_0 de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos $A_1,A_2,A_3,...$ de la siguiente manera: para cualquier $j\geq 0$, A_{j+1} es la unión de A_j con el conjunto de todos los puntos de corte de A_j.

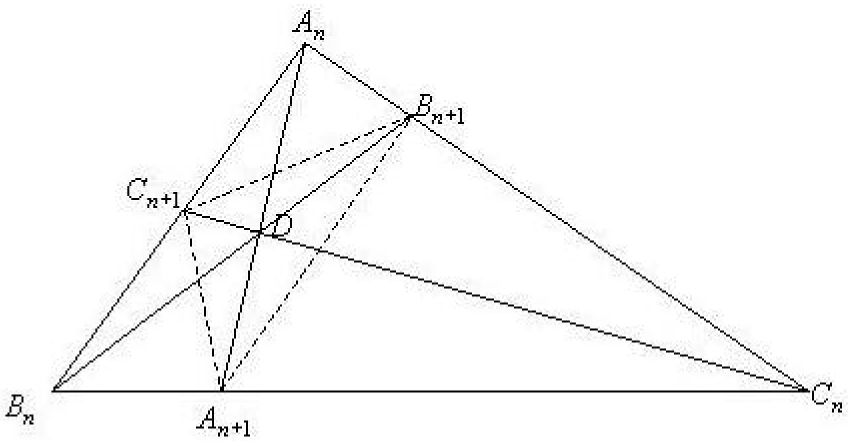
Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier $j\geq 1$ se tiene que $A_j=A_1$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sea una sucesión A_j definida como en el enunciado, y tal que la unión de todos los A_j es un conjunto finito.

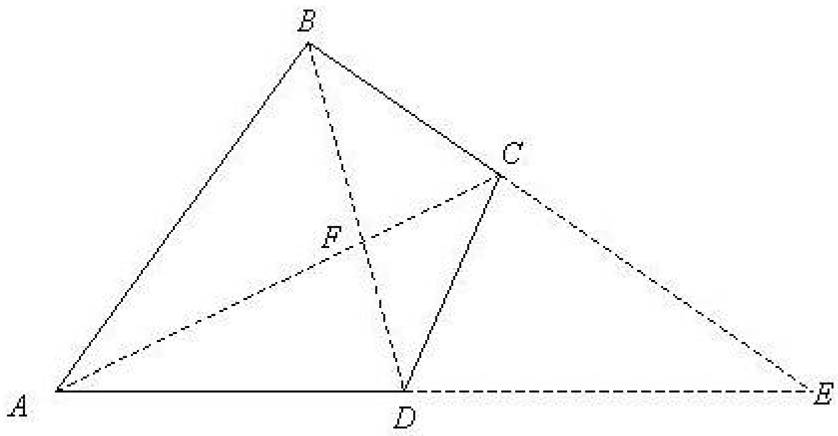
Supongamos ahora que existe algún A_j que contiene a todos sus puntos de corte. Entonces $A_{j+k}=A_j$ para todo natural k. Este resultado se prueba por inducción sobre k, cumpliéndose trivialmente para $k=0$. Supongamos ahora que $A_{j+k}=A_j$ para algún k. Entonces, $A_{j+k}=A_j$ contiene a todos sus puntos de corte, con lo que $A_{j+k+1}=A_{j+k}=A_j$, y el resultado se cumple también para $k+1$, luego se cumple para todo k natural.

Lema 1: No puede haber, en ningún A_j de la sucesión, cuatro puntos tales que uno está en el interior del triángulo formado por los otros tres.



Demostración: Supongamos que para algún A_n de la sucesión, existen cuatro puntos, que llamaremos A_n, B_n, C_n y D tales que D está en el interior del triángulo $A_nB_nC_n$. Sean entonces A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} los pies respectivos de las cevianas por D desde A_n, B_n, C_n. Obviamente, ninguno de estos tres puntos coincide con ninguno de los cuatro anteriores, y son puntos de corte de $\mathcal{A}_n$. Además, D está en el interior del triángulo $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$, por estar en el interior de los cuadriláteros $A_{n+1}B_{n+1}A_nB_n$, $B_{n+1}C_{n+1}B_nC_n$, y $C_{n+1}A_{n+1}C_nA_n$. Por lo tanto, sustituyendo n por n+1,n+2,... en el argumento anterior podemos definir sucesiones infinitas A_{n+k}, B_{n+k}, C_{n+k}, de puntos distintos entre sí, que pertenecerían a la unión de todos los $\mathcal{A}_j$. Contradicción. Luego si la unión de todos los $\mathcal{A}_j$ es finita, no puede haber cuatro puntos tales que uno esté en el interior del triángulo formado por los otros tres.

<u>Lema 2:</u> Si para cualquier $\mathcal{A}_j$ de la sucesión existen cuatro puntos contenidos en él que forman un cuadrilátero no degenerado, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.



<u>Demostración:</u> Supongamos ahora que para algún $\mathcal{A}_j$ de la sucesión, existen cuatro puntos que forman un cuadrilátero no degenerado $ABCD$ que no es un paralelogramo. Si dicho cuadrilátero es cóncavo, entonces uno de los cuatro vértices (aquel cuyo ángulo asociado sea mayor que p) está en el interior del triángulo formado por los otros tres, lo cual es imposible en virtud del lema 1. Si el cuadrilátero no degenerado es convexo, sean sin pérdida de generalidad AD y BC lados no paralelos, de forma que las rectas AD y BC se cortan en E exterior a $ABCD$, estando C, D en el interior de los segmentos BE, AE, respectivamente, como indica la figura. Sea F el punto donde se cortan las diagonales AC y BD del cuadrilátero. Obviamente, E y F son puntos de corte de $\mathcal{A}_j$, luego son puntos de $\mathcal{A}_{j+1}$. Pero F está en el interior de $ABCD$, y por lo tanto en el interior de ABE, que contiene a $ABCD$, siendo A, B, E y F puntos de $\mathcal{A}_{j+1}$, lo cual es imposible por el lema 1. Luego no puede haber en ningún A_j cuatro puntos que sean los vértices de un cuadrilátero no degenerado que no sea un paralelogramo.

Corolario: Para cada cuatro puntos distintos cualesquiera de A_j, se tienen tres posibilidades: 1) son los vértices de un paralelogramo; 2) los cuatro puntos están alineados; 3) tres de ellos están alineados.

Demostración: Es obvio tras considerar que por los lemas 1 y 2, si los cuatro puntos no son los vértices de un paralelogramo, entonces el cuadrilátero que los admite por vértices debe ser degenerado, con lo que bien los cuatro puntos están alineados, bien determinan un triángulo, estando uno de los vértices en el interior de un segmento cuyos extremos son dos de los otros tres.

Teorema 1: Si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, existe una recta que pasa al menos por todos sus puntos menos uno.

Demostración: Por el lema anterior, si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, entonces no contiene ningún cuadrilátero no degenerado. Si el número de puntos contenidos en A_j es menor o igual que 4, el teorema se cumple trivialmente por el corolario a los lemas 1 y 2. Si A_j contiene más de cuatro puntos, y no todos ellos están alineados, elíjanse cuatro de ellos que no estén todos alineados. Por el corolario a los lemas 1 y 2, existe una recta que pasa por exactamente tres de ellos (que denominaremos *B*, *C* y *D*), estando el cuatro (que denominaremos *A*) fuera de esa recta. Sea ahora cualquier otro punto *E* de A_j, y supongamos que no se encuentra en la misma recta que *B*, *C* y *D*. Considerando el cuadrilátero *ABCE*, que no es un paralelogramo por hipótesis, se tiene que al menos tres de sus vértices deben estar alineados, por el corolario a los lemas 1 y 2. Luego como *E* no está en la recta *BC*, entonces *E* está bien en la recta *AB*, bien en la recta *AC*, cuyo único punto común es *A*, al no estar *A* en la recta *BC* por hipótesis. De la misma forma, considerando *ABDE*, se tiene que *E* está bien en *AB*, bien en *AD*, que unido a la condición anterior resulta en que *E* debe estar en *AB*. Pero considerando *ACDE*, se tiene que *E* está bien en *AC*, bien en *AD*, o lo que es lo mismo, *E* y *A* coinciden, que es absurdo. Luego *E* no puede estar fuera de la misma recta que *B*, *C* y *D*, que por lo tanto pasa por todos los puntos de A_j menos por *A*, q.e.d..

Corolario: Si A_j no contiene cuatro puntos que sean los vértices de un paralelogramo, entonces contiene a todos sus puntos de corte.

Demostración: Por el teorema anterior, existe una recta que pasa como mínimo por todos los puntos de A_j menos por uno. Ahora bien, para cualesquiera cuatro puntos alineados de A_j, no se puede definir un punto de corte, y el corolario se cumple trivialmente. Supongamos ahora que existe un punto *A* en A_j que no está en la recta que pasa por los demás. Pero entonces, para cualesquiera puntos *B*, *C*, *D* de la recta que pasa por los demás, *B* está tanto en *AB* como en *CD*, luego *B* es el punto de corte de las rectas *AB* y *CD*, y cualquier punto de corte que se pueda definir está en A_j.

Teorema 2: Si A_j contiene a los cuatro vértices de un paralelogramo, entonces A_j contiene a lo sumo a cinco puntos, siendo el quinto el punto donde se cortan las diagonales del paralelogramo.

Demostración: Sea *ABCD* un paralelogramo cuyos vértices están contenidos en A_j, y supongamos que existe como mínimo un punto *E* adicional que pertenece a A_j. Ahora bien, el cuadrilátero *ABCE* debe ser degenerado, pues no puede ser un paralelogramo, ya que *E* es distinto de *D*. Luego *E* pertenece a una de las rectas *AB*, *AC* o *BC*. De la misma forma, considerando *ACDE*, se tiene que *E* pertenece a una de las rectas *AC*, *AD* o *CD*. Pero *BC* y *AD* no tienen puntos en común, como tampoco los tienen *AB* y *CD*, por ser paralelas, y el punto común de *AB* y *AC* es *A* distinto de *E*, y el punto común de *AB* y *AD* es *A* distinto de *E*. Luego *E* no puede estar en *AB*. Pero al cortarse *BC* y *AC* en *C* distinto de *E*, y al cortarse *BC* y *CD* en *C* distinto de *E*, *E* tampoco puede estar en *BC*. Luego *E* está en *AC*. Considerando los cuadriláteros *BCDE* y *ABDE*, se llega de forma idéntica a la conclusión de que *E* está en *BD*. Luego E es el punto donde se cortan las diagonales de *ABCD*, y no puede haber ningún punto adicional contenido en A_j.

Corolario: Si $A_j \neq A_0$ para algún *j*, entonces A_0 contiene exactamente cuatro puntos que son los vértices de un paralelogramo, en cuyo caso $A_j = A_1 \neq A_0$ para todo *j*.

Demostración: Por el corolario al teorema 1, si A_0 no contiene a un paralelogramo, entonces contiene a todos sus puntos de corte, y $A_j = A_0 = A_1$ para todo *j*, quedando demostrado el enunciado. En caso contrario, A_0 contiene a un paralelogramo *ABCD*. Si adicionalmente contiene a *E*, el punto donde se cortan sus diagonales, entonces A_0 contiene a todos sus puntos de corte, pues cualesquiera cuatro puntos elegidos para definir dos rectas, bien determinan dos rectas paralelas, bien tres de ellos están alineados, siendo el punto de corte uno de los puntos alineados, bien determinan las diagonales del paralelogramo, que definen el punto de corte *E* incluido en A_0, con lo que nuevamente A_j=A_0=A_1 para todo j. Si A_0 contiene únicamente al paralelogramo *ABCD*, entonces su único punto de corte es *E*, con lo que A_1 contiene a todos sus puntos de corte, y A_j=A_1≠A_0 para todo j.

En cualquier caso, A_j=A_1 para todo j, q.e.d., siendo A_1≠A_0 únicamente en el caso en el que A_0 está formado exactamente por los cuatro vértices de un paralelogramo.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: