Problema 76

Demostrar que en cualquier triángulo ABC se verifica

$$\frac{1}{2}\sum_{\text{cíclica}}(a+b)\cos C \leq \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}$$

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Multiplicando los dos miembros de la siguiente desigualdad [1]

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \ ,$$

válida para cualesquiera a, b, c números reales positivos, por $a+b+c$, resulta

$$\frac{a^2+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+c(a+b)}{a+b}\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

de donde se sigue que

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c) \qquad (1)$$

Si a, b, c son las longitudes de los lados de ΔABC, tenemos

$$a+b+c=(b\cos C+c\cos B)+(c\cos A+a\cos C)+(a\cos B+b\cos A)=\sum_{\text{cíclica}}(a+b)\cos C \, .$$

Sustituímos este valor de $a+b+c$ en el segundo miembro de (1) y hemos terminado.

[1] Conocida como desigualdad de Nesbitt, hay cuatro demostraciones de la misma en Arthur Engel, Problem-Solving Strategies, Springer 1998.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI