Solución de Glauber Moreno Barbosa, Rio de Janeiro, Brasil.

Problema 78
(propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Ávila, España)
Resolver en enteros positivos la ecuación $x^y + y^x = x^z + y^z$:

En primer lugar se aíslan las bases de las potencias del problema:

$x^y + y^x = x^z + y^z \Rightarrow x^y - x^z = y^z - y^x$, así tenemos que :

$$\begin{cases} \left|x^y - x^z\right| \in N \\ \left|y^z - y^x\right| \in N \end{cases} \text{(con esto se tienen dos hipótesis) :}$$

$$\begin{cases} x^y \geq x^z \Rightarrow y \geq z\,;\; y^z \geq y^x \Rightarrow z \geq x \Rightarrow y \geq z \geq x \quad (1) \\ \text{o} \\ x^y \leq x^z \Rightarrow y \leq z\,;\; y^z \leq y^x \Rightarrow z \leq x \Rightarrow y \leq z \leq x \quad (2) \end{cases}$$

(I) Analizando el caso (1):

Tenemos que $x^y - x^z = y^z - y^x \Rightarrow x^y - x^z > 0 \Rightarrow y^z - y^x > 0 \Rightarrow \forall\, x,\ y,\ z \in N.$
Igualando $x^y - x^z = k\ \forall\, x,\ y,\ z,\ k \in N.$ (3)

Desarrollando la expresión tenemos:

$x^z = x^y - k \Rightarrow x^z = \left(\sqrt{x^y} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{x^y} - \sqrt{k}\right)$, con eso se puede concluir que $\sqrt{x^y} \geq \sqrt{k}$,
a partir de que $\sqrt{x^y} + \sqrt{k},\ \sqrt{x^y} - \sqrt{k} \in N.$
La expresión $x^z = \left(\sqrt{x^y} + \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{x^y} - \sqrt{k}\right)$ se descompone en dos factores. Para que el resultado sea x^z, estos factores deben contener la base x, se deduce que :

$$\begin{cases} x^a = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \quad (4) \\ x^b = \sqrt{x^y} - \sqrt{k} \quad (5) \end{cases}$$

Como son expresiones con los términos y posiciones respectivas y además la expresión para x^a es una suma y la expresión para x^b es una diferencia, se concluye que :
Sumando $x^a + x^b = 2\sqrt{x^y}$ (6).
También tenemos que : $x^z = \left(x^a\right)\left(x^b\right) \Rightarrow x^a \geq x^b \Rightarrow a \geq b.$
Considerando $b + c = a$, para desarrollar la expresión :

$$x^b\left(x^c + 1\right) = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow \begin{cases} x^b = 2 \Rightarrow x^c + 1 = \sqrt{x^y} \quad (1)' \\ \text{o} \\ x^b = \sqrt{x^y} \Rightarrow x^c + 1 = 2 \quad (2)' \end{cases}$$

Analicemos el primer caso (1)’:

A partir de (6) : $x^a + x^b = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow x^a + 2 = 2(x^c + 1) \Rightarrow x^a = 2x^c$, con eso tenemos que x^a, x^c son del tipo 2^j $\forall$ j $\in$ N.

Multiplicando $x^c + 1 = \sqrt{x^y}$ tenemos que : $2x^c + 2 = 2\sqrt{x^y}$

Sustituyendo $2x^c$ por x^a tenemos : $x^a + 2 = 2\sqrt{x^y} \Rightarrow x^a = 2\sqrt{x^y} - 2$ (7)

De esta manera, a partir de (4) y (7) se obtiene el sistema :

$$\begin{cases} x^a = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \\ x^a = 2\sqrt{x^y} - 2 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x^y} - 2 = \sqrt{x^y} + \sqrt{k} \Rightarrow \sqrt{x^y} = \sqrt{k} + 2 \Rightarrow x^y = \left(\sqrt{k} + 2\right)^2 \quad (8)$$

Sustituyendo (8) en (3) tenemos : $k + 4\sqrt{k} + 4 - x^z = k \Rightarrow x^z = 4\left(\sqrt{k} + 1\right) \Rightarrow$

$x^z = 2^2\left(\sqrt{k} + 1\right)$ (9).

Como la expresión (9), posee el factor 2 y está compuesta solamente por números naturales, tenemos que $\sqrt{k} + 1 = 2^d$ $\forall$ $d \in N$.

A partir de (9), se consideran las expresiones que siguen a continuación para desarrollar una solución:

$$\begin{cases} x^e = 2^2 \quad (10) \\ \sqrt{k} + 1 = 2^d \text{ (Observación : } \sqrt{k} + 1 \text{ no se puede descomponer en factores)} \\ d + 2 = z \end{cases}$$

Así, $\sqrt{k} + 1 = 2^d \Rightarrow \sqrt{k} = 2^d - 1 \Rightarrow \sqrt{k} = \left(\sqrt{2^d} + 1\right)\left(\sqrt{2^d} - 1\right)$.

Como ((1)') $x^b = 2$ e (10) $x^e = 2^2 \Rightarrow x^e = x^{2b} \Rightarrow e = 2b$.

Como $x^e = 2^2$ solamente existe el factor 2, se tiene que $x = 2$ o $x = 4$.

Para x = 2:

Sustituyendo la expresión (8) $\sqrt{k} = \sqrt{x^y} - 2$, en (9) $x^z = 2^2\left(\sqrt{k} + 1\right)$ se obtiene $x^z = 2^2\left(\sqrt{x^y} - 1\right) \Rightarrow x^{z-2} = \sqrt{x^y} - 1$, como en este caso $x = 2$ y sustituyendo en la expresión : $2^{z-2} = \sqrt{2^y} - 1 \Rightarrow 2^{z-2} + 1 = \sqrt{2^y}$ (11), se sabe por el Teorema de la paridad que para $z \neq 2$ se tiene que $2^{z-2} + 1$ será impar.

Considerando $2^{z-2} + 1 = n \Rightarrow 2^{z-2} = n - 1 \Rightarrow 2^{z-2} = \left(\sqrt{n} + 1\right)\left(\sqrt{n} - 1\right)$ (12).

Ya que, $\sqrt{n} + 1$, $\sqrt{n} - 1$ son pares consecutivos, se considera el siguiente sistema :

$$\begin{cases} t = \sqrt{n} - 1 \\ t + 2 = \sqrt{n} + 1 \end{cases}$$

Considerando (12) y el sistema de arriba :

$2^{z-2} = \left(\sqrt{n} + 1\right)\left(\sqrt{n} - 1\right) \Rightarrow 2^{z-2} = t\,(t + 2)$ tenemos que t es par, de esta forma se puede considerar $2^{z-2} = 2^{a'}2^{b'}$ $\forall$ a', b' $\in$ N siendo $a' + b' = z - 2$ (13).

Tenemos un nuevo sistema:

$$\begin{cases} 2^{a'} = t \\ 2^{b'} = t+2 \end{cases} \Rightarrow 2^{b'} = t+2 \;\Rightarrow\; 2^{b'} = 2^{a'}+2 \;\Rightarrow\; 2^{b'} - 2^{a'} = 2 \qquad (14)$$

La expresión arriba indicada puede ser escrita como $2^{a'}\left(2^{c'}-1\right)=2$, cuando $a'+c'=b'$ e $\forall\, c'$ $\in N$. Observando la expresión $2^{c'}-1$ se ve que ella es impar, sin embargo eso sería un absurdo pues el producto de esta expresión por un número que sólo puede descompone rse en 2 genera un número compuesto solamente por el factor 2, de esta manera sólo se puede tener $2^{c'}-1=1$ por lo que se tiene que tener que $c'=1$, consecuent emente $2^{a'}\left(2^{1}-1\right)=2 \;\Rightarrow\; a'=1$ e

(14) $2^{b'} - 2^{a'} = 2 \;\Rightarrow\; b'=2.$

Como se afirmó en (13), $a'+b'=z-2$ sustituimo s el valor de a' e b' en la expresión $a'+b'=z-2 \;\Rightarrow\; z=5.$

Sustituyen do z en (11) $2^{z-2}+1=\sqrt{2^{y}}$ tenemos que $y \notin N$. Se debe sustituir el valor de z para hallar el valor de y.

$2^{3}+1=\sqrt{2^{y}} \;\Rightarrow\; 9=\sqrt{2^{y}} \;\Rightarrow\; 9^{2}=2^{y}.$

Utilizando las reglas de los logaritmos , se puede encontrar el valor de y :

$$9^{2}=2^{y} \Rightarrow \log 9^{2} = \log 2^{y} \;\Rightarrow\; 2\log 9 = y\log 2 \;\Rightarrow\; y=\frac{2\log 9}{\log 2} \;\Rightarrow\; y = 2\log_{2} 9 \quad y \notin N.$$

Para $x=4$:

Como se indicó en (9), $x^{z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right) \Rightarrow \left(2^{2}\right)^{z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right) \Rightarrow 2^{2z}=2^{2}\left(\sqrt{k}+1\right)$

$\Rightarrow 2^{2(z-1)}=\sqrt{k}+1 \quad (15).$

Como se indicó en (8), $\sqrt{x^{y}}=\sqrt{k}+2 \;\Rightarrow\; \sqrt{k}=\sqrt{x^{y}}-2,$ y sustituyen do en (15),

$2^{2(z-1)}=\sqrt{x^{y}}-1,$ como tenemos $x=4$ y sustituyen do en la expresión :

$2^{2(z-1)}=\sqrt{x^{y}}-1 \Rightarrow 2^{2(z-1)}=\sqrt{2^{2y}}-1 \;\Rightarrow\; 2^{2(z-1)}=2^{y}-1 \;\Rightarrow\; 2^{2(z-1)}-2^{y}=-1 \;\Rightarrow$

$2^{y}-2^{2(z-1)}=1.$

El caso de arriba es del mismo modelo de $2^{r}-2^{s}=1 \;\forall\; r, s \in N$, con $r>s$.

Analizando la igualdad $2^{r}-2^{s}=1 \;\Rightarrow\; 2^{r}=2^{s}+1$, con eso se tiene que 2^{r} es impar y el único modo que esto puede ocurrir es si $r=0$, que haría con que $2^{s}=0$, que es un absurdo. U otro modo es con 2^{s} impar, así $s=0$ y se tiene : $2^{r}-1=1 \;\Rightarrow\; 2^{r}=2 \;\Rightarrow\; r=1$

Como en el modelo $2^{r}=2^{y} \;\Rightarrow\; r=y=1$ e $2^{s}=2^{2(z-1)} \;\Rightarrow\; 2^{0}=2^{2(z-1)} \;\Rightarrow\; 1=2^{2(z-1)} \Rightarrow z=1$

Analizando el caso (2)’:

Como ese caso es análogo al caso (1), en el que $x^{b}=\sqrt{x^{y}} \;\Rightarrow\; x^{c}+1=2$ y con (6) se obtiene el sistema :

$$\begin{cases} x^b\left(x^c+1\right)=2\sqrt{x^y} \\ x^a+x^b=2\sqrt{x^y} \end{cases}$$

Con eso se tiene que $x^c+1=2 \Rightarrow x^c=1 \Rightarrow c=0$ e $x^b=\sqrt{x^y} \Rightarrow 2b=y$ (16).

Sustituyendo (16) en $x^a+x^b=2\sqrt{x^y}$, se obtiene $x^a+\sqrt{x^y}=2\sqrt{x^y} \Rightarrow x^a=\sqrt{x^y} \Rightarrow$ $2a=y$, de esta manera con (16) se concluye que $a=b$. De este modo, sustituyendo estos valores en el sistema $\left((4) \text{ e } (5)\right)$:

$$\begin{cases} x^a=\sqrt{x^y}+\sqrt{k} \\ x^b=\sqrt{x^y}-\sqrt{k} \end{cases} \Rightarrow x^a=x^b \Rightarrow \sqrt{x^y}+\sqrt{k}=\sqrt{x^y}-\sqrt{k} \Rightarrow 2\sqrt{k}=0 \Rightarrow k=0$$

Como se expuso en (3), se tiene que $x^y-x^z=k \Rightarrow x^y-x^z=0 \Rightarrow x^y=x^z$ $\Rightarrow y=z$. Mas, conforme al enunciado, se tiene la igualdad $x^y+y^x=x^z+y^z \Rightarrow$ $y^x=y^z \Rightarrow x=z$. Consecuentemente se tiene que $x=y=z \ \forall\, x,\ y,\ z \in N^*$ está resuelto.

Observando la solución se puede concluir que para el caso en (2) también está resuelto.
Las soluciones son: $(x;y;z)=(4;1;1)$ o $(x;y;z)=(x;x;x), \forall\, x \in N^*$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: