Problema 81

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, (Ávila, España). Dedicado a la memoria del Profesor Miguel de Guzmán Ozámiz.

Sea *OMNP* un paralelogramo y *ABCD* un cuadrilátero inscrito en *OMNP*. Sean:

$E = OM \cap BC$; $\quad F = OP \cap BC$; $\quad G = DA \cap MN$; $\quad H = DA \cap PN$;

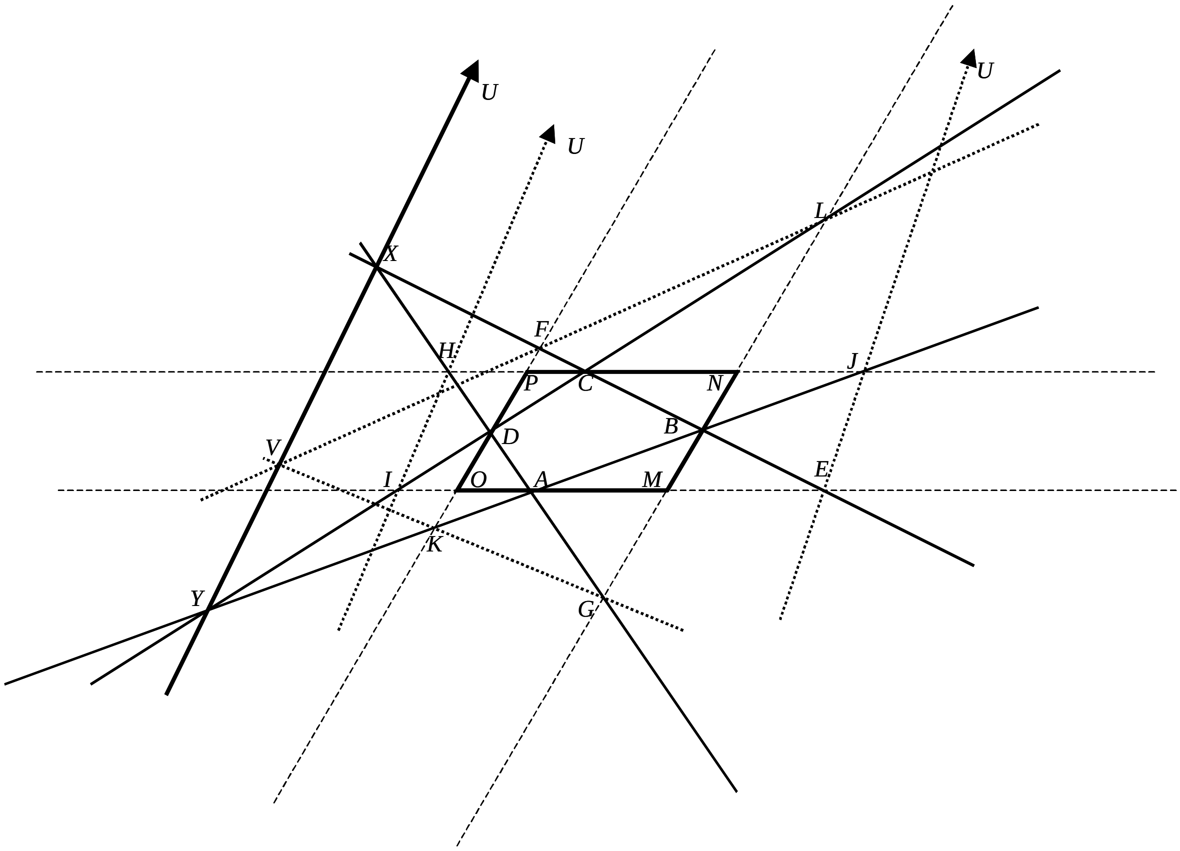
$I = CD \cap OM$; $\quad J = AB \cap PN$; $\quad K = AB \cap OP$; $\quad L = CD \cap MN$.

Si

$X = DA \cap BC$; $\quad Y = CD \cap AB$; $\quad U = IH \cap EJ$; $\quad V = FL \cap KG$,

demostrar que *X*, *Y*, *U*, *V* están en línea recta y calcular la razón doble (*X*,*Y*,*U*,*V*).

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.



Por ser *OMNP* un paralelogramo, se tiene *OM*=*PN* y *OP*=*MN*. Además, las siguientes relaciones son obvias por semejanza entre triángulos o como consecuencia del teorema de Thales:

$$\frac{AM}{AO} = \frac{AB}{AK} = \frac{AG}{AD} = \frac{GM}{DO} = \frac{BM}{KO} = \frac{BG}{DK}; \qquad \frac{BN}{BM} = \frac{BJ}{AB} = \frac{BC}{BE} = \frac{JN}{AM} = \frac{CN}{EM} = \frac{CJ}{AE};$$

$$\frac{CP}{CN} = \frac{CF}{BC} = \frac{CD}{CL} = \frac{FP}{BN} = \frac{DP}{LN} = \frac{DF}{BL}; \qquad \frac{DO}{DP} = \frac{AD}{DH} = \frac{DI}{CD} = \frac{IO}{CP} = \frac{AO}{HP} = \frac{AI}{CH};$$

$$\frac{BX}{FX}=\frac{GX}{DX}=\frac{BG}{DF};\qquad \frac{AX}{HX}=\frac{EX}{CX}=\frac{AE}{CH};\qquad \frac{BY}{KY}=\frac{LY}{DY}=\frac{BL}{DK};\qquad \frac{AY}{JY}=\frac{IY}{CY}=\frac{AI}{CJ}.$$

$$\frac{EU}{JU}=\frac{IU}{HU}=\frac{EI}{HJ};\qquad\qquad \frac{FV}{LV}=\frac{KV}{GV}=\frac{FK}{GL}.$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{DY}{YI}=\frac{DI+IY}{IY}=\frac{\frac{CI}{IY}+\frac{CI}{DI}}{\frac{CI}{DI}}=\frac{\frac{CY}{IY}-1+\frac{CD}{DI}+1}{\frac{CD}{DI}+1}=\frac{\frac{CJ}{AI}+\frac{CH}{AI}}{\frac{CH}{AI}+1}=\frac{HJ}{AI+CH},$$

$$\frac{HX}{XD}=\frac{HX}{DH+HX}=\frac{\frac{AH}{DH}}{\frac{AH}{HX}+\frac{AH}{DH}}=\frac{\frac{AD}{DH}+1}{\frac{AX}{HX}-1+\frac{AD}{DH}+1}=\frac{\frac{AI}{CH}+1}{\frac{AE}{CH}+\frac{AI}{CH}}=\frac{AI+CH}{EI},$$

luego

$$\frac{DY}{YI}\frac{IU}{UH}\frac{HX}{XD}=\frac{HJ}{AI+CH}\frac{EI}{HJ}\frac{AI+CH}{EI}=1,$$

y por el recíproco del teorema de Menelao aplicado al triángulo *DHI*, los puntos *X*, *Y* y *U* están alineados. De la misma forma,

$$\frac{FX}{XC}=\frac{FX}{FX+CF}=\frac{\frac{BF}{CF}}{\frac{BF}{CF}+\frac{BF}{FX}}=\frac{\frac{BC}{CF}+1}{\frac{BC}{CF}+1+\frac{BX}{FX}-1}=\frac{\frac{BL}{DF}+1}{\frac{BL}{DF}+\frac{BG}{DF}}=\frac{BL+DF}{LG},$$

$$\frac{CY}{YL}=\frac{LY-CL}{LY}=\frac{\frac{DL}{CL}-\frac{DL}{LY}}{\frac{DL}{CL}}=\frac{\frac{CD}{CL}+1-1+\frac{DY}{LY}}{\frac{CD}{CL}+1}=\frac{\frac{DF}{BL}+\frac{DK}{BL}}{\frac{DF}{BL}+1}=\frac{FK}{BL+DF},$$

luego

$$\frac{LV}{VF}\frac{FX}{XC}\frac{CY}{YL}=\frac{GL}{FK}\frac{BL+DF}{GL}\frac{FK}{BL+DF}=1,$$

y por el recíproco del teorema de Menéalo aplicado al triángulo *CFL*, los puntos *X*, *Y* y *V* también están alineados, luego *X*, *Y*, *U* y *V* están en la misma recta, q.e.d..

Una vez que sabemos que *X*, *Y*, *U* y *V* están en la misma recta, podemos aplicar el teorema de Menelao a los triángulos *DXY* y *CXY*, pues están alineados *H*, *I* y *U* por un lado, y *F*, *L* y *V* por el otro. Luego como

$$\frac{HX}{DH}=\frac{HX}{AX-HX}\frac{AD+DH}{DH}=\frac{CH}{AE-CH}\frac{OP}{DP},$$

$$\frac{ID}{YI}=\frac{DI}{CD+DI}\frac{CY-IY}{IY}=\frac{OD}{OP}\frac{CJ-AI}{AI},$$

$$\frac{CF}{FX}=\frac{BX-FX}{FX}\frac{CF}{BC+CF}=\frac{BG-DF}{DF}\frac{CP}{PN},$$

$$\frac{LC}{YL}=\frac{CL}{CL+CD}\frac{LY-DY}{LY}=\frac{CN}{PN}\frac{BL-DK}{BL},$$

entonces la raíz doble pedida es

$$\begin{aligned}\frac{UX}{UY}\frac{VY}{VX}&=\frac{ID}{YI}\frac{HX}{DH}\frac{CF}{FX}\frac{YL}{LC}=\frac{DO}{OP}\frac{CJ-AI}{AI}\frac{OP}{DP}\frac{CH}{AE-CH}\frac{CP}{PN}\frac{BG-DF}{DF}\frac{PN}{CN}\frac{BL}{BL-DK}\\&=\frac{DO\cdot CH}{DP\cdot AI}\frac{CP\cdot BL}{CN\cdot DF}\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}=\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}.\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}\frac{CJ-AI}{BL-DK}&=\frac{PN-CP+JN-OM+AM-IO}{MN-BM+LN-OP+DP-KO}=\frac{AM\left(1+\frac{BN}{BM}\right)-CP\left(1+\frac{DO}{DP}\right)}{DP\left(1+\frac{CN}{CP}\right)-BM\left(1+\frac{AO}{AM}\right)}\\&=\frac{MN}{PN}\frac{\frac{AM}{BM}-\frac{CP}{DP}}{\frac{DP}{CP}-\frac{BM}{AM}}=\frac{MN}{PN}\frac{AM}{BM}\frac{CP}{DP},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{BG-FD}{AE-CH}&=\frac{MN-BN+GM-OP+DO-FP}{OM-AO+EM-PN+CN-HP}=\frac{DO\left(1+\frac{AM}{AO}\right)-BN\left(1+\frac{CP}{CN}\right)}{CN\left(1+\frac{BM}{BN}\right)-AO\left(1+\frac{DP}{DO}\right)}\\&=\frac{PN}{MN}\frac{\frac{DO}{AO}-\frac{BN}{CN}}{\frac{CN}{BN}-\frac{AO}{DO}}=\frac{PN}{MN}\frac{DO}{AO}\frac{BN}{CN},\end{aligned}$$

luego podemos expresar la razón doble como

$$\begin{aligned}(X,Y,U,V)&=\frac{UX}{UY}\frac{VY}{VX}=\frac{CJ-AI}{AE-CH}\frac{BG-DF}{BL-DK}=\frac{MN}{PN}\frac{AM}{BM}\frac{CP}{DP}\frac{PN}{MN}\frac{DO}{AO}\frac{BN}{CN}\\&=\frac{AM}{AO}\frac{BN}{BM}\frac{CP}{CN}\frac{DO}{DP}.\end{aligned}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI