Problema 82

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea n un entero positivo. Probar que

$$1+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(2\left(n-k\right)+1\right)F_k^{\ 2}}\leq F_{n+2}\,,$$

siendo F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, definido por F_1=F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Se utilizarán para demostrar la desigualdad varios resultados intermedios, que a continuación se enuncian y demuestran.

Para todo $n\geq 1$, $\boxed{F_{n+1}^{\ 2}=F_{n+2}F_n+\left(-1\right)^n}$.

Se demuestra por inducción. El resultado es obviamente cierto para n=1, pues F_3=2, F_2=F_1=1, siendo entonces ambos miembros iguales a 1. Si el resultado es cierto para n=m, entonces se tiene

$$\begin{aligned}F_{m+2}^{\ 2}&=\left(F_{m+3}-F_{m+1}\right)\left(F_{m+1}+F_m\right)=F_{m+3}F_{m+1}-F_{m+1}^{\ 2}+F_{m+3}F_m-F_{m+1}F_m\\&=F_{m+3}F_{m+1}-\left(-1\right)^m-\left(F_{m+2}-F_{m+3}+F_{m+1}\right)F_m=F_{m+3}F_{m+1}+\left(-1\right)^{m+1},\end{aligned}$$

con lo que el resultado es cierto para m+1 y queda finalizada la demostración.

Para todo $n\geq 1$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}F_k^{\ 2}=F_nF_{n+1}}$.

Se demuestra por inducción. Este resultado es obviamente cierto para n=1, pues F_2=F_1=1, siendo ambos miembros iguales a 1. Si este resultado es cierto para n=m, entonces en virtud del resultado anterior,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}F_k^{\ 2}&=F_{m+1}^{\ 2}+\sum_{k=1}^{m}F_k^{\ 2}=F_{m+2}F_m-\left(-1\right)^{m+1}+F_mF_{m+1}=\left(F_{m+2}+F_{m+1}\right)\left(F_{m+2}-F_{m+1}\right)-\left(-1\right)^{m+1}\\&=F_{m+2}^{\ 2}-F_{m+1}^{\ 2}-\left(-1\right)^{m+1}=F_{m+2}^{\ 2}-F_{m+2}F_m=F_{m+2}F_{m+1},\end{aligned}$$

con lo que el resultado es también cierto para m+1, y queda finalizada la demostración.

Para todo $n\geq 1$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n}F_kF_{k+1}=F_{n+1}^{\ 2}-\frac{1+\left(-1\right)^n}{2}}$.

El resultado se cumple para n=1, pues entonces los dos miembros son iguales a 1. Si este resultado es cierto para n=m, entonces, en virtud de los resultados anteriores,

$$\sum_{k=1}^{m+1} F_k F_{k+1} = F_{m+2}F_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} F_k F_{k+1} = F_{m+2}F_{m+1} + F_{m+1}^{\ 2} - \frac{1+(-1)^m}{2} = F_{m+3}F_{m+1} - \frac{1+(-1)^m}{2}$$

$$= F_{m+2}^{\ 2} - (-1)^{m+1} - \frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = F_{m+2}^{\ 2} - \frac{1+(-1)^{m+1}}{2},$$

siendo por lo tanto cierto para n=m+1, lo cual concluye la demostración.

Utilizando los resultados anteriores, el sumatorio del enunciado se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^{n} \left(2(n-k)+1\right) F_k^{\ 2} = 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} F_k^{\ 2} - \sum_{k=1}^{n} F_k^{\ 2} = 2\sum_{j=1}^{n} F_j F_{j+1} - F_n F_{n+1}$$

$$= 2F_{n+2}F_n + (-1)^n - 1 - F_n F_{n+1} = F_{n+2}F_n + F_n^{\ 2} + (-1)^n - 1$$

$$= F_{n+2}^{\ 2} - F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}F_{n-1} - 1 = F_{n+2}^{\ 2} - F_{n+1}\left(F_{n+1} + F_n - F_{n-1}\right) - 1$$

$$= F_{n+2}^{\ 2} - 2F_{n+1}F_n - 1 = \left(F_{n+2} - 1\right)^2 - 2\left(F_{n+1}F_n - F_{n+2} + 1\right)$$

$$= \left(F_{n+2} - 1\right)^2 - 2\left(F_{n+1} - 1\right)\left(F_n - 1\right) \le \left(F_{n+2} - 1\right)^2,$$

dándose la igualdad si y sólo si F_{n+1}=1 o F_n=1, es decir, si y sólo si n=1 o 2. A partir de esta desigualdad se demuestra trivialmente la del enunciado, tomando la raíz cuadrada del primer y último miembro, y sumando 1 a ambos lados de la desigualdad resultante.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI