Problema 83*. Propuesto por Alex Sierra Cárdenas, Medellín, Colombia.*
Sea ABC un triángulo isósceles con AB = AC. Sea X un punto de BC distinto de los extremos, y sean m_{AX}, m_{BX}, m_{CX} las mediatrices de AX, BX y CX, respectivamente.

Demostrar que la suma de las magnitudes de los dos segmentos que se determinan al cortarse m_{BX} y m_{CX} con m_{AX} y la base BC, es igual a la magnitud de la mediana de ABC relativa a la base.

(

En primer lugar, elegiremos un sistema de coordenadas cartesianas ortonormales, y representaremos el triángulo isósceles haciendo coincidir su base BC con el eje de abscisas y su altura relativa al vértice C con el eje de ordenadas.

Denotaremos por a la altura relativa al vértice C (que coincide con la mediana relativa a la base BC, por ser iguales los lados AB y AC) y por b la semibase BC.

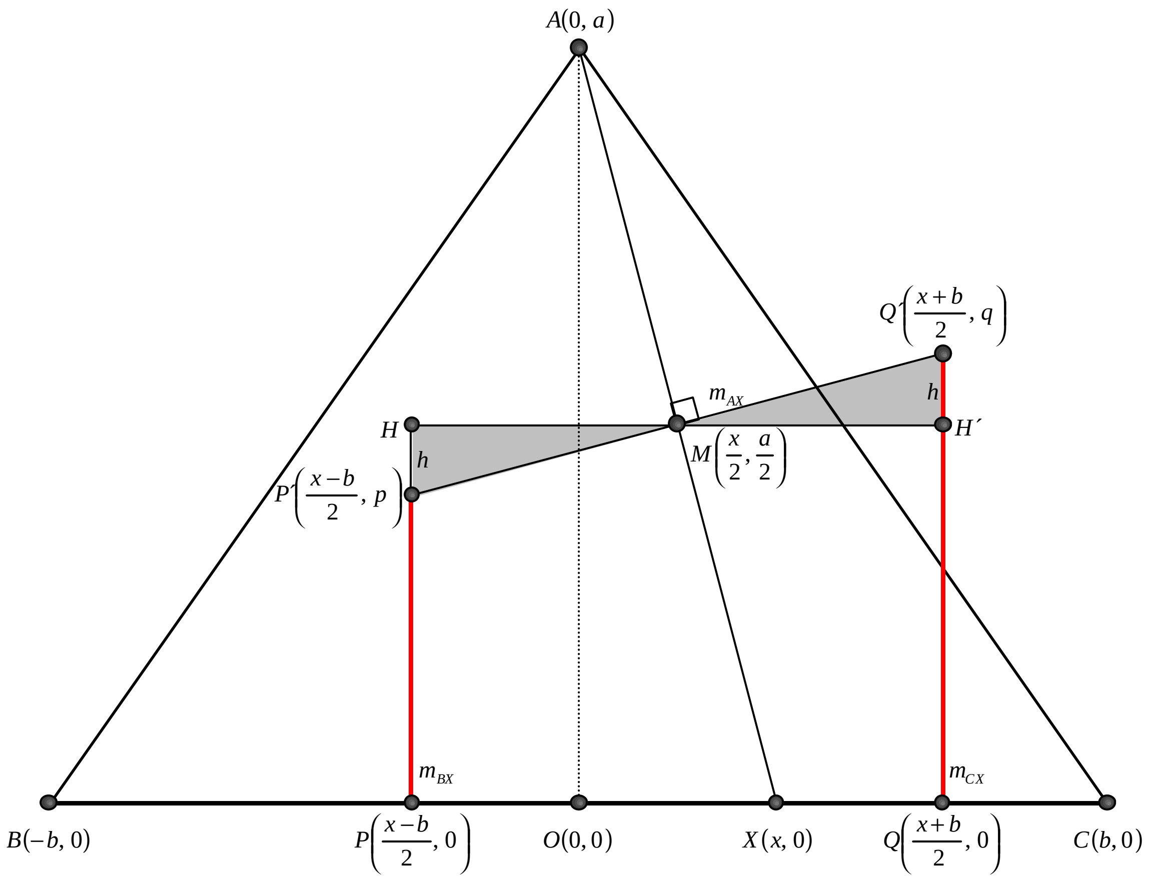
Teniendo en cuenta que las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma (media aritmética) de las coordenadas de sus extremos, resulta inmediato el cálculo de las coordenadas de los puntos medios de AX, BX y CX, que hemos denotado por M, P y Q, respectivamente.

Asimismo, es inmediato comprobar que los triángulos MHP´ y MH´Q´ son iguales. En efecto, son triángulos rectángulos y tienen común el ángulo en M. Además, los catetos $\overline{MH}$ y $\overline{MH´}$ son iguales puesto que

$$\overline{MH} = \frac{x}{2} - \frac{x-b}{2} = \frac{b}{2} = \frac{x+b}{2} - \frac{x}{2} = \overline{MH´}.$$

En consecuencia, HP´ = h = H´Q´, de donde, con referencia a la figura, se obtiene:

$$\overline{PP´} + \overline{QQ´} = p + q = (p+h) + (q-h) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a = \overline{OA}.$$



Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Principado de Asturias. España.
Ingeniero. Profesor de Matemáticas.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI