Problema 85

(Enviado por Bruno Salgueiro Fanego; fué propuesto con el #8 en la Oposiciones a Profesores de Educación Secundaria de Galicia en 2004).

En un autobús se encuentran *n* viajeros. En la próxima parada baja cada viajero independientemente de los otros con probabilidad *p*. La probabilidad de que al autobús no suba ya un ningún nuevo viajero es p_0 y la de que suba un pasajero es 1 - p_0.

a) Hallar la probabilidad de que después de la salida del autobús de la parada se encuentren en él *n* pasajeros.
b) Hallar la probabilidad de que, después de dos paradas se encuentren nuevamente *n* pasajeros en el autobús. (Nota: en los cálculos debe tenerse en cuenta que un viajero que subió en la primera parada puede bajarse en la segunda con probabilidad *p*).

Solución

Primero vamos a ver las probabilidades que entran en juego en el problema, para después hacer una tabla con ellas, que simplificarán notablemente la resolución del problema.

<u>Pasajeros que se bajan:</u> Al ser p la probabilidad de que un pasajero se baje, y al haber n pasajeros, la probabilidad de que se bajen x pasajeros es:

$$P_{bajar}(x) = \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p^x \cdot (1-p)^x$$

Para los propósitos de este problema, las probabilidades que necesitamos son:

$$P_{bajar}(0) = (1-p)^n$$

$$P_{bajar}(1) = n\cdot p\cdot (1-p)^{n-1}$$

$$P_{bajar}(2) = \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}$$

<u>Pasajeros que suben:</u> Según el enunciado, es p_0 la probabilidad de que no suba nadie, y $1-p_0$ la probabilidad de que suba un pasajero.

<u>Para una parada general</u> del autobús, tenemos el siguiente cuadro resumen:

Pasajeros Antes	Pasajeros bajan	Probabilidad	Pasajeros suben	Probabilidad	Pasajeros después	Probabilidad total
n	Ninguno	$(1-p)^n$	Ninguno	p_0	n	$(1-p)^n \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n+1	$(1-p)^n \cdot (1-p_0)$
	1	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1}$	Ninguno	p_0	n-1	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n	$n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \cdot (1-p_0)$
	2	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$	Ninguno	p_0	n-2	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \cdot p_0$
			1	$1-p_0$	n-1	$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} \cdot (1-p_0)$
	3 ó más	¿?	¿?	¿?	n-2 ó menos	¿?

Ahora podemos empezar a resolver el problema.

a) Probabilidad de que después de la salida del autobús, haya n pasajeros:

Simplemente hay que sumar las probabilidades de la tabla de la página anterior, obteniendo:

$$\boxed{P_{a,n,n}=(1-p)^{n}\cdot p_0+n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)}$$

Otras resultados de interés para el segundo apartado son:

$$P_{a,n,n-1}=n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p_0+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{n-2}\cdot(1-p_0)$$

$$P_{a,n,n+1}=(1-p)^{n}\cdot(1-p_0)$$

donde el primer subíndice indica que es la probabilidad del apartado a (una sola parada), el segundo subíndice indica el número de pasajeros inicial y el tercer subíndice indica el número de pasajeros final.

b) Probabilidad de que después de 2 paradas haya n pasajeros en el autobús:

Para este apartado hay que combinar astutamente los resultados de la tabla anterior. Primero vemos las posibilidades que hay. Ya que en cada parada n aumenta como mucho 1, y puede bajar hasta 0, las posibilidades son:

Antes	Después de la 1ª parada	Después de la 2ª parada
n	n+1	n
	n	
	n-1	

Por lo que habrá que sumar las probabilidades de cada una de las tres posibilidades descritas, teniendo en cuenta que para la primera y para la tercera, el número inicial de personas para la 2ª parada es n+1 y n-1 respectivamente (no n, como en el cuadro). Así, tendremos:

$$P_{b1}=P_{a,n,n+1}\cdot P_{a,n+1,n}=$$
$$=(1-p)^{n}\cdot(1-p_0)\cdot\left[(n+1)\cdot p\cdot(1-p)^{n}\cdot p_0+\frac{(n+1)\cdot n}{2}\cdot p^{2}\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)\right]$$

$$P_{b2}=P_{a,n,n}\cdot P_{a,n,n}=\left[(1-p)^{n}\cdot p_0+n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)\right]^2$$

$$P_{b3}=P_{a,n,n-1}\cdot P_{a,n-1,n}=$$
$$=\left[n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p_0+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^{n-2}\cdot(1-p_0)\right]\cdot(1-p)^{n-1}\cdot(1-p_0)$$

Con esto, la solución del apartado b) es simplemtente sumar las probabilidades de las tres opciones:

$$\boxed{P_b = P_{b1} + P_{b2} + P_{b3}}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI