

Problema 83

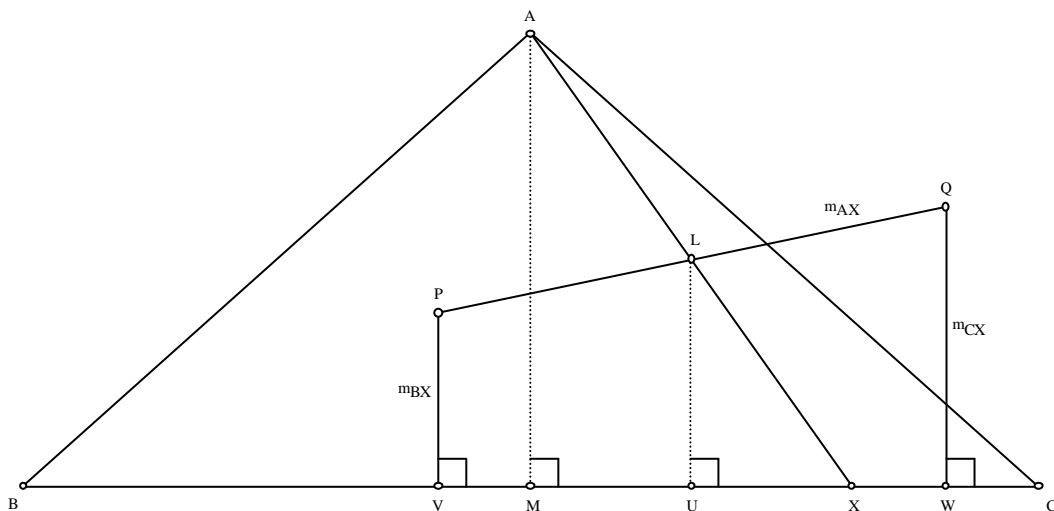
Sea ABC un triángulo isósceles con $AB=AC$. Sea X un punto de BC distinto de los extremos, y sean m_{AX} , m_{BX} , m_{CX} las mediatrices de AX , BX y CX , respectivamente. Demostrar que la suma de las magnitudes de los dos segmentos que se determinan al cortarse m_{BX} y m_{CX} con m_{AX} y la base BC , es igual a la magnitud de la mediana de ABC relativa a la base.

Solución de Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca, España.

Con mayor generalidad, sea m_{AX} una recta arbitraria que biseca el segmento AX .

Sean P y Q , respectivamente, los puntos de intersección de m_{BX} y m_{CX} con m_{AX} .

Sea L el punto medio de AX y M, U, V, W los respectivos pies de las perpendiculares trazadas por A, L, P, Q sobre BC .



Al ser $AB=AC$, el punto M anteriormente definido es el punto medio de la base BC , con lo que AM es la mediana relativa a la base de ΔABC y se verifica que

$VM = BM - BV = MC - VX = (MX + XC) - (VM + MX) = XC - VM = 2 \cdot XW - VM$,
de donde

$$VM = XW \quad (1)$$

El teorema de Tales, habida cuenta que $AL=LX$ y que $AM\parallel LU$, da inmediatamente

$$MU = UX \quad (2)$$

A partir de (1) y (2),

$$VU = VM + MU = XW + UX = UW$$

de donde se sigue que LU es la paralela media del trapecio $PVWQ$ y, por consiguiente,

$$LU = \frac{PV + QW}{2} \quad (3)$$

Por otra parte, los triángulos AMX y LUX son semejantes; por tanto,
 $AM : LU = AX : LX = 2$

y

$$AM = 2 \cdot LU \quad (4)$$

Finalmente, de (3) y (4),

$$\underline{AM = PV + QW}$$

y la demostración es completa.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

