Problema 86

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)}{\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)}\right]$$

no depende de *a* y calcularlo.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Utilizando la fórmula de De Moivre, se tiene

$$\sin(3a)=3\cos^2(a)\sin(a)-\sin^3(a)=3\sin(a)-4\sin^3(a)\,;$$

$$\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)=\frac{3}{4}\sin(ka)-\frac{1}{4}\sin(3ka)-\frac{3}{4}\sin\left(\frac{p}{3}-ka\right)+\frac{1}{4}\sin(p-3ka)$$
$$=\frac{3}{4}\sin(ka)+\frac{3}{4}\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right).$$

Por lo tanto, cada sumando es igual a 3/4 independientemente de *a*, salvo en los casos en los que tanto numerador como denominador sean iguales a 0. Luego si numerador y denominador no se anulan para ningún *k*, entonces el límite pedido se halla trivialmente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin^3(ka)-\sin^3\left(\frac{p}{3}-ka\right)}{\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

El denominador se anulará para algún *k* cuando:

$$\sin(ka)+\sin\left(ka-\frac{p}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin(ka)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(ka)=\sqrt{3}\sin\left(ka-\frac{p}{6}\right)=0\,;$$

$$ka-\frac{p}{6}=mp\,;\qquad\qquad a=\left(\frac{6m+1}{6k}\right)p\,.$$

Si esta condición se cumple para algún entero *m* y algún entero positivo *k*, entonces hay sumandos que son indeterminados, del tipo 0/0, y en ese caso la suma, y por lo tanto el límite, no se podrían definir.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: