

Problema 87

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía. Ligeramente modificado por el editor.

Se considera la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \ln \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^{2^{k-1}}} \right) \right].$$

i) Probar que

$$(1 - 2^{-n}) \ln 2 < x_n < 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

ii) Estudiar la convergencia de $\{x_n\}$ y, en su caso, hallar el límite.

Solución de Daniel Lasasoa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

ii) Demostraremos por inducción que, para todo $n \geq 1$,

$$x_n = \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right) \right] = \ln 2 + \ln \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right).$$

La igualdad es obvia para $n=1$, pues

$$x_1 = \ln \left[1 + \frac{1}{2^{2^0}} \right] = \ln \left[1 + \frac{1}{2} \right] = \ln \left[2 - \frac{1}{2} \right] = \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) \right] = \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{2^1}} \right) \right].$$

Si la igualdad se cumple para $n=m$, entonces para $n=m+1$, se tiene que

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \ln \left[\prod_{k=1}^{m+1} \left(1 + \frac{1}{2^{2^{k-1}}} \right) \right] = x_m + \ln \left[\left(1 + \frac{1}{2^{2^m}} \right) \right] = \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{2^m}} \right) \left(1 + \frac{1}{2^{2^m}} \right) \right] \\ &= \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{(2^{2^m})^2} \right) \right] = \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{2^{m+1}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. Por lo tanto, es obvio que la sucesión converge, siendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[2 \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right) \right] = \ln 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right) = \ln 2 + \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2^n}} \right) \right) \\ &= \ln 2 + \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

i) Acotaremos primero la sucesión superiormente. Al ser $\ln(1+x) < x$ para todo x positivo, y ser $2^n > n$ para todo entero positivo n , se tiene

$$x_{n+1} - x_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}} \right) < \frac{1}{2^{2^n}} < \frac{1}{2^n}; \quad x_{n+1} < \frac{1}{2^n} + x_n.$$

Luego como $x_1 = \ln 2 < 1$, es trivial por inducción que $x_n < 1 + 1/2 + \dots + 1/2^{n-1} = 2 - 1/2^{n-1}$, q.e.d..

Nos falta entonces demostrar que

$$(1-2^{-n})\ln 2 < x_n = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right),$$

o equivalentemente,

$$1-2^{-n} < 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right)}{\ln 2} = 1 + \log_2\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right); \quad \log_2\left(1 - \frac{1}{2^{2^n}}\right) > -\frac{1}{2^n}; \quad \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}} + \frac{1}{2^{2^n}} < 1.$$

Sea entonces la siguiente función:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + 2^{-x}.$$

El límite de esta función cuando x tiende a infinito es 1, pues el primer sumando tiende a $2^0=1$, mientras el segundo tiende a 0. La derivada de esta función es

$$\frac{df}{dx} = \ln 2 \left(\frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2} - 2^{-x} \right) = \ln 2 \left(\frac{1}{x^2 \sqrt[2]{2}} - \frac{1}{2^x} \right) = \frac{\ln 2}{2^x x^2} \left(2^{x-\frac{1}{x}} - x^2 \right).$$

Para x suficientemente grande, se tiene que $2^x > 2x^2 > x^2 2^{1/x}$, luego para x suficientemente grande la función es siempre creciente. Además, $f(1)=1$, siendo además su derivada nula en este punto. Luego si demostramos que la derivada se anula una única vez para $x>1$, quedará demostrado que $f(x)<1$ para $x>1$, y como conclusión quedará probada la acotación inferior propuesta. Ahora bien, para que la derivada se anule, ha de ser

$$2^{\frac{x^2-1}{x}} = x^2, \quad \ln x = (\ln 2) \log_2 x = \frac{x^2-1}{2x} \ln 2.$$

Las derivadas de los miembros izquierdo y derecho de la última igualdad son

$$\frac{1}{x}; \quad \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \frac{\ln 2}{2}.$$

Iguálándolas, queda una ecuación de segundo grado en x , con discriminante positivo, coeficiente de x negativo y término independiente igual a 1. Luego tiene dos soluciones positivas cuyo producto es uno, y las derivadas de los términos izquierdo y derecho de la última igualdad sólo son iguales en un único punto $x>1$. Por lo tanto, la ecuación

$$\ln x = \frac{x^2-1}{2x} \ln 2,$$

que tiene solución para $x=1$, y exactamente una solución para $x>1$ (en caso contrario la ecuación de segundo grado propuesta se cumpliría en más de un punto $x>1$). Luego $f(x)<1$ para todo $x>1$, q.e.d..

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

