Problema 88

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}$$

una función estrictamente positiva y continua. Probar que para cualesquiera $x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]$, existe un número x ($a\leq x\leq b$) tal que

$$\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}=\frac{1}{f(x)}\,.$$

Observación: la notación $f^{2005}(x_k)$ representa la potencia de exponente 2005 del número $f(x_k)$.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Sean x_+, x_-, elementos distintos de $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, tales que $f(x_+)\geq f(x_k)\geq f(x_-)$ para todo k=1,2,...,n. Se tiene entonces que

$$\frac{1}{f(x_-)}=\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_-)}}\geq\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}\geq\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_+)}}=\frac{1}{f(x_+)}\,.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_+>x_-$. Por el teorema de los valores intermedios, al ser $f(x)$ continua en $[a,b]$, también es continua en $[x_-,x_+]\subset[a,b]$, con lo que $f(x)$ en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre $f(x_+)$ y $f(x_-)$, ambos inclusive. En concreto, $f(x)$ tomará, para algún $x\in[x_-,x_+]\subset[a,b]$, el valor

$$\frac{1}{\sqrt[2005]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f^{2005}(x_k)}}}\text{, q.e.d..}$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI