Problema 90

Propuesto por el editor.

Por un punto P, interior a un triángulo dado ABC, se trazan paralelas a los tres lados del mismo, formando así tres paralelogramos y tres triángulos. ¿Para qué punto P es mínima la suma de las áreas de los tres triángulos?

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Llamemos d_A, d_B, d_C las distancia de P a los lados BC, CA, AB, respectivamente, y h_A, h_B y h_C las alturas trazadas respectivamente desde A, B y C a los lados opuestos. Es entonces obvio, llamando $[XYZ]$ al área del triángulo XYZ, que

$$\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}=\frac{d_C\cdot AB}{2[ABC]}+\frac{d_A\cdot BC}{2[ABC]}+\frac{d_B\cdot CA}{2[ABC]}=\frac{[APB]+[BPC]+[CPA]}{[ABC]}=1.$$

Los tres triángulos formados son obviamente semejantes al ABC (pues dos de los lados de cada triángulo y del ABC son paralelos dos a dos, estando los terceros en una recta común), siendo la razón entre el área de cada uno de ellos y el área de ABC igual al cuadrado de la razón entre sus respectivas alturas desde los vértices correspondientes. Es decir, la suma de las áreas de los tres triángulos viene dada por:

$$\left(\frac{d_C^2}{h_C^2}+\frac{d_A^2}{h_A^2}+\frac{d_B^2}{h_B^2}\right)[ABC].$$

Pero utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, se tiene que

$$\frac{d_C^2}{h_C^2}+\frac{d_A^2}{h_A^2}+\frac{d_B^2}{h_B^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}\right)^2=\frac{1}{3},$$

dándose la igualdad si y sólo si

$$\frac{d_C}{h_C}=\frac{d_A}{h_A}=\frac{d_B}{h_B}=\frac{1}{3},$$

es decir, si y sólo si P es el baricentro G de ABC. Luego P=G para que la suma de las áreas de los triángulos sea mínima, siendo entonces dicha área igual a 1/3 del área de ABC.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI