Óscar Ferreira Alfaro
Profesor de Secundaria
Colegio Sagrada Familia P.J.O (Valencia)
España

Solución a dos de los cinco problemas rumanos

Nº 18.2:

Hallad las cifras a y b para que el número (escrito en el sistema decimal) $\overline{543ab2}$ sea divisible por 42.

Solución:

Sea $P = \overline{543ab2} = 42k, k \in \mathbb{N}$. Los valores mínimo y máximo en los que oscilará P se producirán, respectivamente, cuando

$$a = b = 0 \to 543002$$
$$a = b = 9 \to 543992$$
$$543002 \leq 42k \leq 543992 \quad \to \quad 12929 \leq k \leq 12952$$

por lo que tenemos $12952 - 12929 + 1 = 24$ posibles valores para k, y podemos dar una solución general para P. Si $k = 12929 \to P = 543018$

$$P = 543018 + 42t, t \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 23$$

Y de esta relación debemos buscar los valores de P acabados en 2.

$$P = 42 \cdot (12929 + t)$$

Si P acaba en 2, necesariamente la expresión $f(t) = 12929 + t$ ha de acabar en 1 ó 6. El siguiente cuadro de valores nos da todas las soluciones al problema:

t	***P***	***a***	***b***
2	543102	1	0
12	543522	5	2
22	543942	9	4
7	543312	3	1
17	543732	7	3

Nº 18.5:

Halla una terna de enteros positivos (x, y, z) **que cumplan:**

$$x^2 + y^2 + z^2 = 41^{13}$$

Solución:

A priori, la ecuación diofántica no lineal parece de difícil solución. Sin embargo, realizando los cambios siguientes

$$x = 41^6 a \qquad y = 41^6 b \qquad z = 41^6 c$$

el problema ofrece un resultado rápido.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 41^{13} \quad \Rightarrow \quad \left(41^6 a\right)^2 + \left(41^6 b\right)^2 + \left(41^6 c\right)^2 = 41^{13}$$

$$41^{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 41^{13} \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 41$$

Una terna válida es: $(a,b,c) = (1,2,6)$

La solución será: $(x, y, z) = \left(41^6, 2\cdot 41^6, 6\cdot 41^6\right)$

Puesto que no debemos olvidar la simetría de dichas soluciones, el conjunto completo de soluciones se refleja en el siguiente cuadro:

x	***y***	***z***
41^6	$2\cdot 41^6$	$6\cdot 41^6$
$6\cdot 41^6$	41^6	$2\cdot 41^6$
$2\cdot 41^6$	$6\cdot 41^6$	41^6
$2\cdot 41^6$	41^6	$6\cdot 41^6$
$6\cdot 41^6$	$2\cdot 41^6$	41^6
41^6	$6\cdot 41^6$	$2\cdot 41^6$

Una segunda terna válida es: $(a,b,c) = (4,4,3)$

La solución será: $(x, y, z) = \left(4\cdot 41^6, 4\cdot 41^6, 3\cdot 41^6\right)$

x	***y***	***z***
$4\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$	$3\cdot 41^6$
$4\cdot 41^6$	$3\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$
$3\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$	$4\cdot 41^6$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI