PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (2)

Presentamos una selección de problemas propuestos en la Competición Matemática Mediterránea (Memorial Peter O'Halloran), entre 1998 y 2001.

1998,#**3**(**España**)

En el triángulo ABC, I es el incentro y $D \in (BC)$, $E \in (CA)$, $F \in (AB)$ son los puntos de tangencia del círculo inscrito con los lados.

Sea $M \in (BC)$ el pie de la bisectriz interior del ángulo $\widehat{BIC}$, y sea $P = FE \cap AM$.

Demostrar que DP es la bisectriz interior del ángulo $\widehat{FDE}$.

1999,#**3**(**Austria**)

Sean a, b, c números reales no nulos y x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Demostrar que

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{x}{1 + a^2} + \frac{y}{1 + b^2} + \frac{z}{1 + c^2}.$$

1999,#**4**(**Bulgaria**)

Sea ABC un triángulo con lados $BC = a, CA = b, AB = c$ y tal que $\widehat{B} = 4.\widehat{A}$

Demostrar que

$$ab^2c^3 = (b^2 - a^2 + ac)(a^2 - b^2 + ac)^2.$$

2000,#**2**(**Turquía**)

Se dan n números reales positivos $a_1, \cdots, a_n$, distintos dos a dos. Demostrar que, para cada n –upla ordenada $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, donde σ_i es +1 ó - 1, existen : una permutación $b_1, \cdots, b_n$ de los números $a_1, \cdots, a_n$; y una n – upla ordenada $(\beta_1, \cdots, \beta_n)$, donde cada β_i es +1 ó -1, de tal manera que el signo de la expresión

$$\sum_{j=1}^{i} \beta_j b_j$$

coincide con σ_i para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

2000,#**4**(**España**)

P, Q, R, S son los puntos medios respectivos de los lados BC, CD, DA, AB del cuadrilátero convexo $ABCD$. Demostrar que

$$4(AP^2 + BQ^2 + CR^2 + DS^2) \leq 5(AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2).$$

2001,#**1**(**Austria**)

Sea k una circunferencia de centro O, y sean P y Q dos puntos sobre k. Sea M el punto medio de PQ , y A y C dos puntos variables sobre k, de tal manera que AC pasa por M. El trapecio ABCD está inscrito en k, de modo que AB es paralela a CD y ambas son paralelas a PQ.

Demostrar que AD y BC se cortan en un punto X que es independiente de la posición de A sobre la circunferencia.

2001,#**2**(**Bulgaria**)

Hallar todos los enteros n tales que el polinomio $p(x) = x^5 - nx - n - 2$ puede descomponerse en producto de dos polinomios no constantes, con coeficientes enteros.

2001,#**4**(**Bulgaria**)

Se da un triángulo equilátero ABC, de lado 1. Designamos con Δ el conjunto de los puntos interiores o sobre los lados de ABC. Para cada punto $M \in \Delta$, a_M, b_M, c_M son las distancias de M a los lados BC, CA, AB respectivamente. Definimos

$$f(M) = a_M^3(b_M - c_M) + b_M^3(c_M - a_M) + c_M^3(a_M - b_M).$$

a) Describir geométricamente el conjunto $\{M \in \Delta : f(M) \geq 0\}$.

b) Hallar los valores máximo y mínimo de $f(M)$ cuando $M \in \Delta$, y los puntos donde son alcanzados.