Problema 91

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a,b,g los ángulos del triángulo ABC y sea n un número natural impar. Probar que

$$\frac{\sin(na)+\sin(nb)+\sin(ng)}{\cos\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)}$$

es entero y determinar su valor.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Para cualquier n impar, podemos escribir $n=4m\pm1$ con m entero. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sin(na)+\sin(nb) &= 2\sin\left(n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\\
&= 2\sin\left((4m\pm1)\frac{p-g}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\pm\frac{p}{2}-\frac{ng}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)=\pm2\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(ng) &= 2\sin\left(\frac{ng}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)=2\sin\left((4m\pm1)\frac{p-a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\\
&= 2\sin\left(\pm\frac{p}{2}-n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right)=\pm2\cos\left(n\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sin(na)+\sin(nb)+\sin(ng) &= \pm2\cos\left(\frac{ng}{2}\right)\left[\cos\left(n\frac{a+b}{2}\right)+\cos\left(n\frac{a-b}{2}\right)\right]\\
&= \pm4\cos\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{nb}{2}\right)\cos\left(\frac{ng}{2}\right).
\end{aligned}$$

Luego la expresión del enunciado es entera, siendo igual a +4 o –4 según sea respectivamente +1 o –1 el resto de dividir n por 4.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI