Problema 93

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Se consideran las sucesiones (x_n),(y_n) definidas por las recurrencias

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_n = 2x_{n-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1, \\ y_n = y_{n-1} + \sqrt{y_{n-1}{}^2 + 1}. \end{cases}$$

Calcular, si existen, los límites

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\ln(y_n)}.$$

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Es trivial demostrar por inducción que $x_n=2^n$. Esto es obviamente cierto para $n=1$, y si es cierto para $n=m$, entonces

$$x_{m+1} = 2x_m = 2\cdot 2^m = 2^{m+1}.$$

Se puede también demostrar fácilmente por inducción que $2^n-1\geq y_n\geq 2^{n-1}$ para todo n. Las desigualdades se cumplen trivialmente para $n=1$, y si se cumplen para $n=m$, entonces

$$y_{m+1} = y_m + \sqrt{y_m{}^2+1} > y_m + |y_m| = 2y_m \geq 2\cdot 2^{m-1} = 2^m = 2^{(m+1)-1};$$

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \sqrt{y_m{}^2+1} &\leq 2^m - 1 + \sqrt{\left(2^m-1\right)^2+1} = 2^m - 1 + \sqrt{2^{2m} - 2^{m+1} + 2} \\ &< 2^m - 1 + \sqrt{2^{2m}} = 2^{m+1} - 1. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n\cdot 2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{2}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x_n y_n}}\right) = 0.$$

$$\frac{x_n}{\ln(y_n)} > \frac{2^n}{\ln\left(2^n-1\right)} > \frac{2^n}{\ln\left(2^n\right)} = \frac{1}{\ln 2}\frac{2^n}{n}.$$

Pero 2^n diverge mucho más rápido que n, y no existe el límite de $x_n/\ln(y_n)$ (la sucesión tiende a infinito).

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI