

#### Problema 94

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea  $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$  una función continua y derivable en  $(a,b)$ . Probar que existe un  $c\in(a,b)$  tal que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} f'(c) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \right).$$

Solución de Daniel Lasasoa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Nota preliminar: es conveniente precisar que es necesario que  $f(x)$  esté definida y sea continua en el cerrado  $[a,b]$  para que se cumpla la propiedad mencionada. En caso contrario, sea  $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$  definida como sigue:

$$f(a) = f(b) = 0; \quad f(x) = x - \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \ln((x-a)(b-x)) \text{ si } x\in(a,b).$$

Obviamente,  $f(x)$  es continua y derivable en  $(a,b)$ , aunque no es continua ni en  $a$  ni en  $b$ , estando sin embargo definida en todo el cerrado  $[a,b]$ . Es obvio que, para todo  $x\in(a,b)$ ,

$$f'(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \frac{(b-x) - (x-a)}{(x-a)(b-x)} = 1 + \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right).$$

Por lo tanto, para cada  $c\in(a,b)$ ,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} f'(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left( \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \right),$$

con lo que la igualdad del enunciado no se daría nunca.

Tras esta nota preliminar, consideremos entonces que  $f:[a,b]\rightarrow\mathbf{R}$  toma valores reales para todo punto de  $[a,b]$ , siendo continua en dicho intervalo cerrado, y derivable en el abierto  $(a,b)$ . Supongamos que la igualdad propuesta en el enunciado no se cumple para ningún punto de  $(a,b)$ . Entonces, al ser continuos los dos lados de la igualdad dada en el enunciado, eso quiere decir que uno será siempre mayor que el otro. Supongamos entonces que, para todo punto del abierto, es

$$f'(c) > \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \left( \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \right).$$

Entonces, para cada dos puntos  $c,d$  tales que  $a < c < d < b$ , se tiene

$$\begin{aligned}
f(d) - f(c) &= \int_c^d f'(x) dx > \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \int_c^d \left( \frac{1}{a-x} + \frac{1}{b-x} \right) dx \\
&= -\sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \left[ \ln((x-a)(b-x)) \right]_c^d = \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \ln \left( \frac{(c-a)(b-c)}{(d-a)(b-d)} \right).
\end{aligned}$$

Fijado  $c$ , se tiene entonces que

$$\lim_{d \rightarrow b} f(d) > f(c) + \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \ln \left( \frac{(c-a)(b-c)}{b-a} \right) + \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \lim_{d \rightarrow b} \ln \left( \frac{1}{b-d} \right).$$

Los dos primeros sumandos del miembro de la derecha son finitos, pero no así el tercero, que diverge hacia valores positivos arbitrariamente grandes. Luego  $f(x)$  no es continua en  $b$ . Contradicción.

De forma similar, si asumimos que para todo punto del abierto se cumple

$$f'(c) < \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \left( \frac{1}{a-c} + \frac{1}{b-c} \right),$$

entonces

$$f(d) - f(c) < \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \ln \left( \frac{(c-a)(b-c)}{(d-a)(b-d)} \right).$$

Luego

$$\lim_{c \rightarrow a} f(c) > f(d) - \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \ln \left( \frac{b-a}{(d-a)(b-d)} \right) + \sqrt{\frac{2}{a^2 + b^2}} \lim_{c \rightarrow a} \ln \left( \frac{1}{c-a} \right).$$

Nuevamente los dos primeros sumandos son finitos, pero el tercero diverge hacia valores positivos arbitrariamente grandes. Luego  $f(x)$  no es continua en  $a$ , y se llega nuevamente a una contradicción.

Luego para al menos un punto  $c \in (a, b)$  se da la igualdad dada en el enunciado, q.e.d..

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

