Problema 95

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sea n un número entero y positivo. Probar que

$$\sqrt{4^n+3\left[\sum_{k=0}^{n-1}3^k\binom{2n}{2k+1}\right]^2}$$

es entero.

Solución de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, Navarra, España.

Es obvio que para todo n entero positivo podemos encontrar enteros positivos a_n y b_n tales que

$$\left(\sqrt{3}\pm 1\right)^{2n}=a_n\pm b_n\sqrt{3}\,.$$

De hecho, utilizando la fórmula del binomio, y separando términos pares e impares en la suma resultante,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}\pm 1\right)^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(\sqrt{3}\right)^k(\pm 1)^{2n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}\left(\sqrt{3}\right)^{2k}(\pm 1)^{2n-2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\left(\sqrt{3}\right)^{2k+1}(\pm 1)^{2n-2k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n}3^k\binom{2n}{2k}\pm\sqrt{3}\sum_{k=0}^{n-1}3^k\binom{2n}{2k+1}=a_n\pm b_n\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}a_n^{\,2}-3b_n^{\,2}&=\left(a_n+b_n\sqrt{3}\right)\left(a_n-b_n\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{3}+1\right)^{2n}\left(\sqrt{3}-1\right)^{2n}=\left[\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)\right]^{2n}\\&=[3-1]^{2n}=4^n.\end{aligned}$$

Luego se tiene que la expresión dada en el enunciado es

$$\sqrt{4^n+3\left[\sum_{k=0}^{n-1}3^k\binom{2n}{2k+1}\right]^2}=\sqrt{4^n+3b_n^{\,2}}=\sqrt{a_n^{\,2}}=a_n=\sum_{k=0}^{n}3^k\binom{2n}{2k},$$

que es entero, q.e.d..

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI