Problemas de nivel medio y de Olimpiadas (20)

Cinco problemas de las Olimpiadas de Serbia y Montenegro

1(1997) Dado un número natural k, hallar el menor número natural C tal que

$$\frac{C}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$$

es entero, para todo $n \geq k$.

2(1998) Más de la mitad de las caras de un poliedro convexo pueden colorearse de manera que no haya ningún par de caras coloreadas que compartan una arista. Demostrar que no es posible inscribir una esfera en ese poliedro.

3(2000) Todos los vértices de un polígono en el plano coordenado tienen coordenadas enteras, y todos sus lados tienen longitudes enteras. Demostrar que su perímetro es par.

4(2001) Sean $p_1, p_2, \cdots, p_n$ los n menores números primos ($n \geq 3$). Probar que

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1 \bullet p_2 \bullet \cdots \bullet p_n} < \frac{1}{2}.$$

5(2004) Sea r el inradio de un triángulo acutángulo. Probar que la suma de las distancias del ortocentro a los lados no es mayor que $3r$.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI