Problema 92

Propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España.

Sean a, b, c tres números complejos distintos y no nulos.
Calcular, en la forma más simplificada posible,

$$\frac{2a^2+b^2+c^2}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{a}{c}\right)}+\frac{a^2+2b^2+c^2}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}+\frac{a^2+b^2+2c^2}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}.$$

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba, España.

Demostraremos que la expresión a simplificar es idéntica a esta otra:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}+(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=a^2+b^2+c^2$$

,

donde además se sabe que:

$$\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=(a-b).(b-c).(c-a)$$

(Determinante de Vandermonde)

Veámoslo con mayor detalle:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{a.b.c.\left[a.(c-b)+b.(a-c)+c.(b-a)\right]}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{-a^2.b.c(b-c)-b^2.a.c.(c-a)-c^2.a.b.(a-b)}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{a^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{b^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

Por otra parte, desarrollando el segundo sumando tenemos que:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{(a^2+b^2+c^2).\left[b.c.(c-b)+a.c.(a-c)+a.b.(b-a)\right]}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2).b.c.(c-b)+(a^2+b^2+c^2).a.c.(a-c)+(a^2+b^2+c^2).a.b.(b-a)}{(a-b).(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{-(a^2+b^2+c^2).b.c.}{(a-b).(c-a)}+\frac{-(a^2+b^2+c^2).a.c}{(a-b).(b-c)}+\frac{-(a^2+b^2+c^2).a.b}{(b-c).(c-a)}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

Sumando ambas expresiones, tenemos que:

$$\frac{a.b.c.\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 1 & b & b\\ 1 & c & c\end{vmatrix}+(a^2+b^2+c^2).\begin{vmatrix}1 & a & b.c\\ 1 & b & a.c\\ 1 & c & a.b\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}}=\frac{a^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{b^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}+$$

$$+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}=\frac{2.a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+2.b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+2.c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}$$

En definitiva,

$$\frac{2.a^2+b^2+c^2}{(1-\frac{a}{b}).(1-\frac{a}{c})}+\frac{a^2+2.b^2+c^2}{(1-\frac{b}{a}).(1-\frac{b}{c})}+\frac{a^2+b^2+2.c^2}{(1-\frac{c}{b}).(1-\frac{c}{a})}=a^2+b^2+c^2$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: