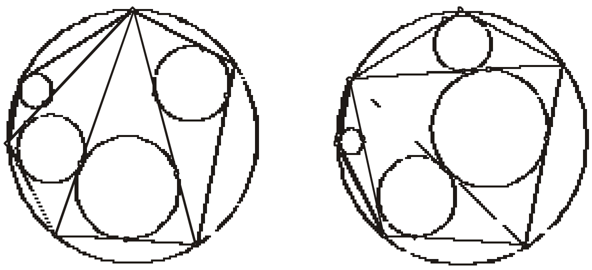
Uma soma incrivelmente invariante

Carlos A.Gomes
Natal/RN, UFRN

Um resultado altamente inesperado é encontrado no maravilhoso texto "Advanced Euclidean Geometry" de Roger Johnson's publicado pela Dover publications em 1960. É um antigo teorema japonês que pelo seu surpreendente conteúdo merece ser "ressuscitado" agora na língua portuguesa para que ele seja conhecido e apreciado com muito louvor pelos amantes da harmonia da matemática e em especial pelos geômetras.

Seja um polígono convexo, que possa ser inscrito numa circunferência. Se triangularizarmos esse polígono a partir de um de seus vértices (traçando diagonais, é claro!) e inscrevermos em cada um destes triângulos uma circunferência a soma das medidas dos raios dessas circunferências permanece constante independente da triangularização realizada com o polígono.

Veja um exemplo ilustrativo com um hexágono:



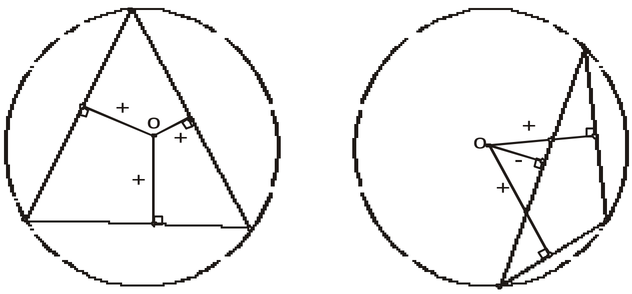
Nas duas figuras acima a soma das medidas dos raios das circunferências inscritas nos triângulos é a mesma.(apesar das medidas dos raios serem diferentes)

Para verificarmos o que foi dito acima usaremos o

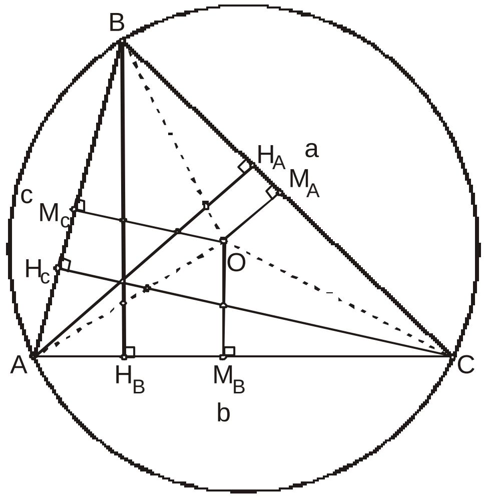
TEOREMA DE CARNOT: Num triângulo ABC a soma (algébrica) das distâncias do circuncentro do triângulo ABC aos lados AB, AC e BC desse triângulo é igual a R+r, onde R é a medida do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC e r a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC.

* A convenção de sinais será:
+ $\rightarrow$ Quando pelo menos uma parte do segmento está no interior do triângulo.
- $\rightarrow$ Quando o segmento está completamente fora do triângulo.

Observe as figuras:



Vamos considerar aqui o caso do triângulo acutângulo. Os outros dois casos podem ser verificados de modo razoavelmente semelhantes.



Na figura acima , temos que:

2 . (ABC) = (a + b + c). r , ( ) = Área

2 (ABC) = $a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\,\overline{OM_C}$ e daí

r (a + b + c) = $a\overline{OM_A} + b\overline{OM_B} + c\,\overline{OM_C}$ (0)

Agora perceba que:

$\angle$AOB = 2$\angle$C; $\angle$BOC = 2$\angle$A; $\angle$AOC = 2$\angle$B (Pelo teorema do ângulo inscrito). Assim podemos observar as seguintes semelhanças:

$$\Delta ABH_B \sim \Delta ACH_C \sim \Delta BOM_A \rightarrow \frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \quad (1)$$

$$\Delta BAH_A \sim \Delta BCH_C \sim \Delta COM_B \rightarrow \frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \quad (2)$$

$$\Delta CBH_B \sim \Delta CAH_A \sim \Delta AOM_C \rightarrow \frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_A}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \quad (3)$$

e daí de (1), (2) e (3) temos que

$$\frac{\overline{AB_B}}{c} = \frac{\overline{AH_C}}{b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow \frac{\overline{AH_b} + \overline{AH_c}}{c+b} = \frac{\overline{OM_A}}{R} \rightarrow R\left(\overline{AH_b} + \overline{AH_c}\right) = (b+c).\overline{OM_A} \quad (4)$$

$$\frac{\overline{BH_A}}{c} = \frac{\overline{BH_C}}{a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow \frac{\overline{BH_A} + \overline{BH_c}}{c+a} = \frac{\overline{OM_B}}{R} \rightarrow R\left(\overline{BH_a} + \overline{BH_c}\right) = (c+a).\overline{OM_B} \quad (5)$$

$$\frac{\overline{CH_B}}{a} = \frac{\overline{CH_a}}{b} = \frac{\overline{OM_C}}{R} \rightarrow \frac{\overline{CH_B} + \overline{CH_a}}{a+b} = \frac{\overline{OM_c}}{R} \rightarrow R\left(\overline{CH_B} + \overline{CH_a}\right) = (a+b).\overline{OM_C} \quad (6)$$

Adicionando (4), (5) e (6) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c) \quad (7)$$

finalmente fazendo (7) + (0) temos:

$$\overline{OM}_a(b+c)+\overline{OM}_b(a+c)+\overline{OM}_c(a+b)=R(a+b+c)$$

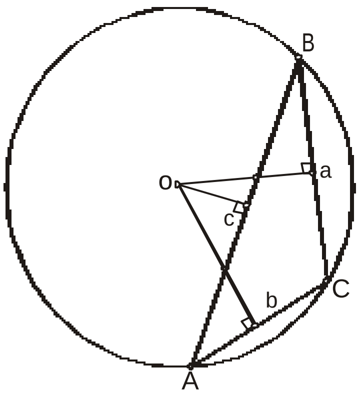
$$+$$

$$\underline{a.OM_a+b.OM_b+c.\overline{OM}_c=r\,(a+b+c)}$$

$$\left(\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c\right)(a+b+c)=(R+r)(a+b+c)$$

e finalmente, $\overline{OM}_a+\overline{OM}_b+\overline{OM}_c=R+r$.

Obs. Na convenção estabelecida para os sinais da medida algébrica dos segmentos o sinal (-) é justificável para garantir a igualdade que relaciona as medidas das áreas conforme ilustramos abaixo:



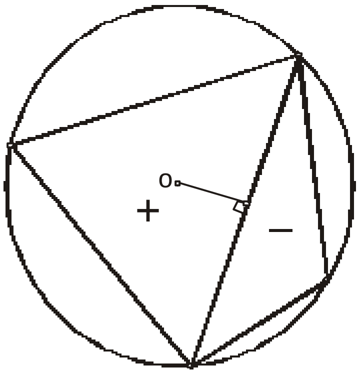
(ABC) = (OAC) + (OCB) – (OAB) e daí,

r (a + b + c) = $a\overline{OM}_a+b\overline{OM}_b-c\overline{OM}_c$

Bem, de posse do teorema de Carnot vamos agora provar a nossa jóia rara! Vejamos: Primeiro perceba que qualquer triangularização de n–ágono com diagonais desse polígono gera n–2 triângulos. Vamos assumir que os triângulos são numerados de 1 a (n – 2). Seja r_i a medida do raio da circunferência inscrita no i–ésimo triângulo e para cada triângulo seja $OO_i=a_i\overline{O_iM}_{ai}+b_i\overline{O_iM}_{bi}+c_i\overline{O_iM}_{ci}$ e daí pelo teorema de Carnot temos que $r_i+R=\overline{OM}_{ci}$. Calculando a soma desse resultado aplicado a cada triângulo temos:

$$r_1+r_2+\ldots+r_{n-2}=\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+\ldots+\overline{OO}_{n-2}-(n-2).R$$

Perceba que a soma $\overline{OO}_1+\overline{OO}_2+\ldots+\overline{OO}_n$ consiste na soma algébrica das perpendiculares traçadas aos lados do n-ágono são contadas apenas uma vez (e com sinal positivo) já as perpendiculares às diagonais são contadas duas vezes (uma com sinal positivo e outra com sinal negativo) conforme ilustra a figura abaixo:



Assim a soma $\overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + ... + \overline{OO}_{n-2}$ corresponde a soma das distâncias de O aos lados do polígono (que é constante)e daí concluímos que $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2}$ é constante pois $r_1 + r_2 + ... + r_{n-2} = \overline{OO}_1 + \overline{OO}_2 + ... + \overline{OO}_{n-2} + (n-2).R$ = constante.

Referências:

[1] Mathematical gems III , Ross Honsberger, MAA
[2] www.cut-the-knot.org/proofs/jap.shtml

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI