Problemas de nivel medio y de olimpiadas 19 (Australia 2004)

Soluciones de Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España

1. Determinar todos los pares (*a*,*b*) de números reales tales que la ecuación

$$x^3+3x^2+ax+b=0$$

tiene tres raíces reales que pueden formar progresión aritmética.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que las raíces que están en progresión aritmética son $m-d$, m, $m+d$. Entonces, por las relaciones de Cardano-Vieta, la suma de las tres raíces, $3m$, es igual a -3, luego $m=-1$. Por las mismas relaciones, se tiene que

$$a=m(m-d)+m(m+d)+(m-d)(m+d)=3m^2-d^2=3-d^2;$$

$$-b=m(m-d)(m+d)=m\left(m^2-d^2\right)=-\left(1-d^2\right).$$

Entonces, se deduce que $a=b+2$, siendo $b\leq 1$ pues $d^2\geq 0$ (si $d=0$, $b=1$, $a=3$ entonces las tres raíces son iguales a -1, estando en progresión aritmética de diferencia 0). Siempre que $a=b+2\leq 3$, se tiene

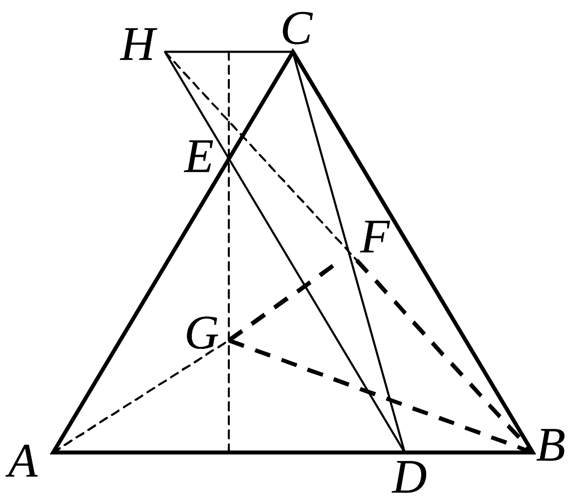
$$0=x^3+3x^2+(b+2)x+b=\left(x+1+\sqrt{1-b}\right)(x+1)\left(x+1-\sqrt{1-b}\right),$$

estando por lo tanto las tres raíces en progresión aritmética de diferencia $\sqrt{1-b}$. Luego los pares (a,b) buscados son todos los $(l+2, l)$ para todo $l\leq 1$ real.

2. Sea *ABC* un triángulo equilátero, y *D* un punto del lado *AB*, situado entre *A* y *B*. Sea *E* un punto sobre *AC* tal que *DE* es paralelo a *BC*. Sea *F* el punto medio de *CD* y *G* el circuncentro de *ADE*.
Hallar los ángulos del triángulo *BFG*.

Para la resolución de este problema se utilizará el resultado, de sobra conocido, que dice que la bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles es también la mediatriz del lado desigual. En un triángulo equilátero, este resultado es cierto para los tres vértices. Es obvio que al ser *DE* paralela a *BC*, *ADE* es equilátero, y *BD*=*CE*. Sea entonces *H* el punto donde se encuentran *DE* y la paralela a *AB* por *C*. Luego *BCHD* es un paralelogramo, y sus diagonales, *CD* y *BH*, se cortan en sus puntos medios, es decir, en

F. Por ser $\angle HCE=\angle CBA$ y $CH=BD$ por construcción, el triángulo *HCE* es equilátero. Luego *EG* es al mismo tiempo mediatriz de *AD* y bisectriz de $\angle AED$, luego es bisectriz de $\angle CEH$, luego mediatriz de *CH*. Pero entonces $GH=CG=BG$, siendo esta última igualdad cierta por ser *ABC* equilátero y estar *G* en la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, luego en la mediatriz de *BC*. Por lo tanto, *F* es el punto medio del lado *BH* del triángulo *BGH*, que es isósceles en *G*. Luego *FG* es perpendicular a *BH*, luego a *BF*, y $\angle BFG$ es recto.



Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo *BAG*, en el que el ángulo $\angle BAG$ es igual a *p*/6, por ser *AG* la bisectriz de $\angle BAC$:

$$BG^2 = AG^2 + AB^2 - 2AG \cdot AB\cos\left(\angle BAG\right) = \left(\frac{AD}{\sqrt{3}}\right)^2 + AB^2 - 2\frac{AD}{\sqrt{3}}AB\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{AD^2}{3} + AB^2 - AD \cdot AB.$$

Se ha utilizado el hecho de que, en todo triángulo equilátero, el radio de la circunferencia circunscrita multiplicado por el doble del coseno de *p*/6 es igual al lado.

Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo *BDH*, en el que $\angle BAG$ es igual a 2*p*/3, $\angle HDA=\angle EDA=p/3$:

$$BH^2 = BD^2 + DH^2 - 2BD \cdot DH\cos\left(\angle BDH\right) = BD^2 + AB^2 + BD \cdot AB$$
$$= AD^2 + 3AB^2 - 3AB \cdot AD.$$

Se ha utilizado que $DH=BC=AB$, y que $AD+BD=AB$. Pero *F* es el punto medio de *BH*, luego al ser $\angle BFG$ recto, se tiene que

$$\cos\left(\angle FBG\right)=\frac{BF}{BG}=\frac{BH}{2BG}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{AD^2+3AB^2-3AB\cdot AD}{\frac{AD^2}{3}+AB^2-AD\cdot AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Luego $\angle FBG=p/6$, y consecuentemente $\angle BGF=p/3$.

3. Determinar todos los enteros no negativos *m* y *n* tales que

$$6^m+2^n+2$$

es un cuadrado perfecto.

Utilizaremos para la resolución de este problema el hecho conocido de que todo cuadrado perfecto da resto 0 o 1 módulo 4, según sea el cuadrado de un entero par o impar, respectivamente. Al mismo tiempo, es trivial comprobar que el cuadrado de cualquier número da resto 0, 1, 4 o 7 módulo 9, según sea el cuadrado de un múltiplo de 3, o de un número que de resto ±1, ±2 o ±4 módulo 9, respectivamente.

Supongamos que existe alguna solución con $m\geq 2$. Entonces, 4 divide a 6^m, luego 2^n debe dar resto 2 o 3 al dividir por 4, y debe ser $n=1$, con lo que debe ser cuadrado perfecto $4(9\cdot 6^{m-2}+1)$. Ahora bien, esto es imposible si $m=2$, luego el número entre paréntesis es un cuadrado perfecto impar que da resto ±1 al dividir por 9. Luego existe un entero positivo a tal que

$$9\cdot 6^{m-2}+1=\left(18a\pm 1\right)^2=324a^2\pm 36a+1; \qquad 2^{m-2}\cdot 3^{m-2}=4a\left(9a^2\pm 1\right).$$

Ahora bien, el último número entre paréntesis no puede tener a 3 como factor, luego 3^{m-2} divide a a, mientras que $4(9a^2\pm 1)\geq 32a$ divide a 2^{m-2}. Pero entonces

$$3^{m-2}\leq a<32a\leq 4a\left(9a^2\pm 1\right)\leq 2^{m-2},$$

que es absurdo, luego no hay soluciones con $m\geq 2$.

Supongamos ahora que $m=1$. Entonces, 2^n debe dar resto 0 o 1 al dividir por 4. En el primer caso, $n\geq 2$, y $2^n+8=4(2+2^{n-2})$ debe ser cuadrado perfecto, luego 2^{n-2} debe dar reseto 2 o 3 al dividir por 4, y debe ser $n=3$, en cuyo caso el número dado 6+8+2=16, que es de hecho un cuadrado perfecto. En el segundo caso, debe ser $n=0$, siendo el número dado 6+1+2=9, que también es cuadrado perfecto.

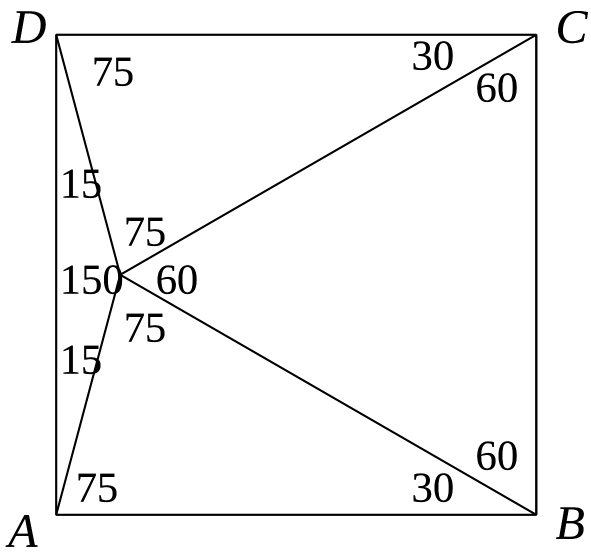
Finalmente, sea m=0. Entonces, 2^n debe dar resto 1 o 2 al dividir por 4, siendo n=0 o 1. El número dado es entonces 1+1+2=4, que también es cuadrado perfecto, o 1+2+2=5, que no lo es.
Luego todas las soluciones para (m,n) no negativos son (0,0), (1,0) y (1,3).

4. Sea *ABCD* un paralelogramo. Supongamos que existe un punto *P* en su interior tal que

$$\widehat{ABP} = 2\widehat{ADP} \text{, y } \widehat{DCP} = 2\widehat{DAP}.$$

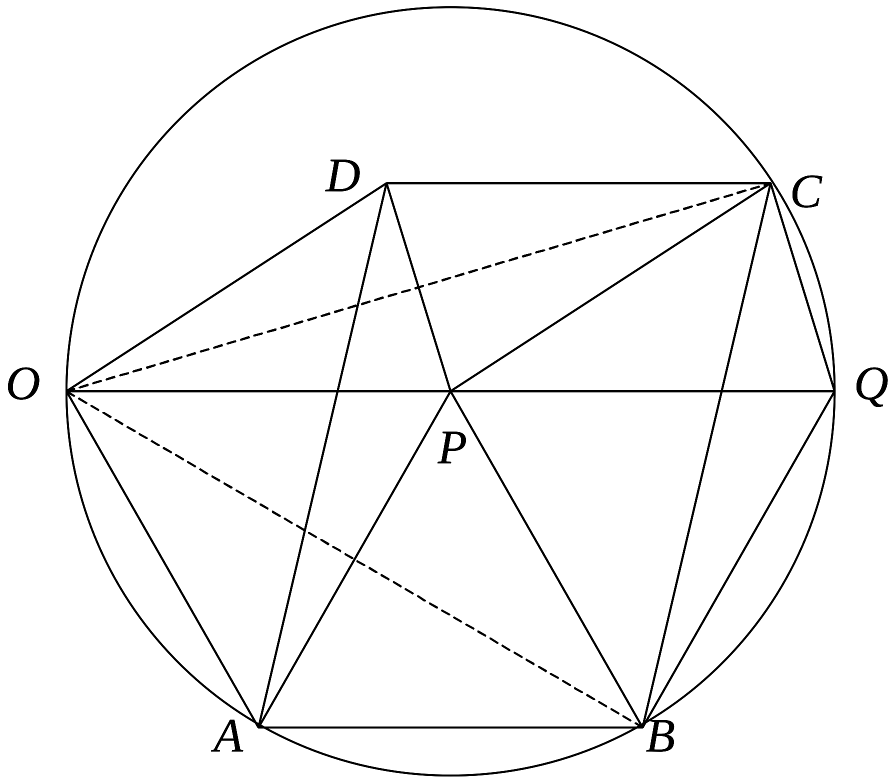
Demostrar que *AP*=*BP*=*CP*.

Nota: Entiendo que hay una errata en el problema, y el enunciado debería ser "Demostrar que *AB*=*BP*=*CP*." Véase la figura siguiente:



Es obvio que *ABCD* es un paralelogramo (cuadrado), y el punto interior *P* es tal que $\angle ABP = \angle DCP = 30°$, mientras que $\angle ADP = \angle DAP = 15°$, con lo que se cumple la hipótesis del problema. Sin embargo, *AP* no es igual a *BP*=*CP*. Luego el enunciado propuesto debe contener una errata. Sin embargo, como se demuestra a continuación, la tesis modificada que propongo sí se deduce necesariamente de la hipótesis.
Construimos exteriormente a *ABCD* sobre el lado *BC* un triángulo *BQC* igual a *APD*. Obviamente, *ABQP* y *CDPQ* son paralelogramos pues por construcción *BQ* es paralelo e igual a *AP*, y *CQ* es paralelo e igual a *PD*. Sean ahora O_1, O_2 los puntos donde las

bisectrices de $\angle ABP$ y $\angle DCP$ cortan a la recta PQ, y sea O el punto donde la circunferencia circunscrita al triángulo BCQ corta por segunda vez a la recta PQ.



Por la hipótesis del enunciado,

$$\angle BO_1Q = \angle O_1BA = \frac{1}{2}\angle PBA = \angle ADP = \angle BCQ\,;$$

$$\angle CO_2Q = \angle O_2CD = \frac{1}{2}\angle PCD = \angle DAP = \angle CBQ\,.$$

Luego O_1 y O_2 están en la circunferencia circunscrita al triángulo BCQ, y por lo tanto coinciden con O. Pero además, OPB y OPC son isósceles en P, por ser OP, AB y CD paralelas (luego $\angle POB=\angle ABO$ y $\angle POC=\angle DCO$) y OB, OC las bisectrices de $\angle ABP$ y $\angle DCP$, respectivamente (luego $\angle PBO=\angle ABO$ y $\angle PCO=\angle DCO$). Luego $BP=OP=CP$. Entonces, P es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo OBC, y como dicha circunferencia también pasa por Q, $OP=QP=AB=CD$, estas dos últimas igualdades por construcción. Luego $AB=BP=CP$, q.e.d..

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: