

Problema 100. Propuesto por K.R.S. Sastry, Bangalore, India.

Un triángulo se llama *heroniano* si sus lados y área son enteros. Sea n un número natural dado. Demostrar que para $n = 1, 2, 3, \dots$, existe al menos un triángulo heroniano que cumple la siguiente condición: dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es igual a n veces el perímetro.



Denotemos por H_n el triángulo heroniano que verifica que dos de sus lados son números naturales consecutivos y su área es n veces su perímetro.

Expresando en forma de terna los triángulos, donde las componentes representan las longitudes de los lados, demostraremos que una tal sucesión (H_n) de triángulos admite la siguiente **expresión general**:

$$H_n = (4n + 1, 4n(2n + 1), 4n(2n + 1) + 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En efecto, obviamente, para cada número natural n , sus lados son enteros, y dos de ellos son consecutivos. Además, como trivialmente se comprueba, H_n es un triángulo rectángulo (*pitagórico*):

$$\begin{aligned} \{4n(2n + 1) + 1\}^2 - \{4n(2n + 1)\}^2 &= \underbrace{[\{4n(2n + 1) + 1\} + \{4n(2n + 1)\}]}_{8n(2n+1)+1} \cdot \underbrace{[\{4n(2n + 1) + 1\} - \{4n(2n + 1)\}]}_{1} = \\ &= 8n(2n + 1) + 1 = 16n^2 + 8n + 1 = (4n + 1)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Por tanto, el área de H_n es simplemente el semi-producto de sus dos lados menores (*catetos*).

Veamos cuál es la relación entre el área y el perímetro de H_n . Denotando por A_n y P_n , respectivamente, el área y el perímetro de H_n , se tiene:

$$\frac{A_n}{P_n} = \frac{(4n + 1) \cdot 4n(2n + 1)}{\{4n + 1\} + \{4n(2n + 1)\} + \{4n(2n + 1) + 1\}} = \frac{(4n + 1) \cdot 2n(2n + 1)}{8n(2n + 1) + 2(2n + 1)} = \frac{2n(4n + 1)(2n + 1)}{2(4n + 1)(2n + 1)} = n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Para probar la **no unicidad** en la expresión de H_n , veamos el siguiente **contraejemplo**:

Los triángulos $H_3 = (13, 84, 85)$, dado por la expresión general aquí presentada, y el $(21, 20, 29)$, que no es generado por ésta, ambos son heronianos, verifican las condiciones del enunciado y el área de cada uno de ellos es el triple del correspondiente perímetro.

Observación: La expresión general de H_n se deduce fácilmente de la teoría de las ternas pitagóricas desarrollada en la obra **TERNAS PITAGÓRICAS. Teoría de las Contracciones Diofantotriádicas**. Jesús Álvarez Lobo. ISBN: 84-8498-212-2. (No venal).

Veamos una deducción directa para el término general de H_n . Denotando por c_n el cateto impar, se tiene:

$$\begin{aligned} H_n = (c_n, b_n, b_n + 1) &\equiv \left\{ \begin{array}{l} H_n \text{ pitagórico} \Rightarrow c_n^2 = 2b_n + 1 \\ A_n = nP_n \Rightarrow b_n c_n = 2n(2b_n + 1 + c_n) \end{array} \right\} \Rightarrow b_n c_n = 2n(c_n^2 + c_n) \stackrel{c_n \neq 0}{\Rightarrow} b_n = 2n(c_n + 1) \\ &\Rightarrow c_n^2 = 2[2n(c_n + 1)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow c_n^2 - 4nc_n - (4n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_n = 4n + 1 \\ c_n = -1 \notin \mathbb{N}^* \end{cases} \\ &\Rightarrow b_n = 2n[(4n + 1) + 1] \Rightarrow b_n = 4n(2n + 1) \\ &\Rightarrow H_n = (4n + 1, 4n(2n + 1), 4n(2n + 1) + 1) \end{aligned}$$

