Solução do problema 97) por Marcos Martinelli (Brasil)

Para calcular tal determinante multiplique a 3ª coluna por n e some à primeira, logo em seguinda, multiplique a 2ª coluna por n e some à terceira. Teremos então que calcular o determinante da seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} n^3y+y & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4x+nx \\ n^4y+ny & n^2(x-y) & n^3x+x \end{pmatrix} = xy\begin{pmatrix} n^3+1 & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4+n \\ n^4+n & n^2(x-y) & n^3+1 \end{pmatrix}.$$

E agora multipliquemos a 2ª linha por $\frac{-1}{n}$ e somemos a mesma à 3ª linha, logo em seguida, multipliquemos a 1ª linha por n somando-a à 3ª linha novamente, obtendo:

$$xy\begin{pmatrix} n^3+1 & n(z-y) & 0 \\ 0 & z+n^3x & n^4+n \\ 0 & -n^2z-\frac{z}{n} & 0 \end{pmatrix} = xy(-1)(n^4+n)(n^3+1)\left(-n^2z-\frac{z}{n}\right)=$$

$= xyzn(n^3+1)(n^3+1)\dfrac{(n^3+1)}{n} = xyz(n^3+1)^3$. E assim o resultado é (n^3+1).

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI