

### Problema 99

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumanía.

Estudiar la convergencia de la sucesión  $(a_n), n \geq 1$ , definida por

$$a_n = n \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^3} - \frac{1}{\sqrt{n^4 + k^4}} \right) \right].$$

Solución de Daniel Lasasoa Medarde, Pamplona, España.

Es obvio que

$$a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k^4}} = \frac{n+1}{2n} - \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k^4}}$$

Obviamente, el primer sumando converge a  $1/2$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Sea ahora la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Escribamos la suma de Riemann para la integral de dicha función en el intervalo  $[0,1]$  tomando la partición  $\{0, 1/n, 2/n, \dots, 1\}$ , evaluada la función en el extremo mayor de cada intervalo de la forma  $((k-1)/n, k/n)$ , para  $k=1, 2, \dots, n$ . Para cada  $n$ , llamaremos  $S_n$  a la suma de Riemann para la partición anterior. Entonces,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + k^4}} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k^4}}.$$

Por lo tanto, es obvio que

$$a_n = \frac{n+1}{2n} - S_n.$$

Ahora bien, la función  $f(x)$  es monótona (decreciente), continua y finita en el intervalo cerrado  $[0,1]$ , luego es integrable en dicho intervalo, siendo el valor de dicha integral finito, y coincidente con el límite de la suma  $S_n$ . Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx,$$

que es finito. Luego la solución converge y éste es su límite.

Para hallar esta integral, tomemos en primer lugar  $y=1/x$ :

$$dx = -\frac{dy}{y^2}; \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \int_{+\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{y^4}}} \left(-\frac{dy}{y^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y^4+1}} dy.$$

De aquí se concluye que

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

Esta integral se puede relacionar con la función beta tomando  $t=1/(1+x^4)$ , pues entonces

$$x = \left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{4}}; \quad dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\frac{1}{4} t^{-\frac{5}{4}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt;$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx = -\int_1^0 t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} t^{-\frac{5}{4}} (1-t)^{-\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{1}{4}-1} dt = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right),$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma de Euler, y B es la función beta, definidas por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt; \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Ahora bien, es conocido que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Luego finalmente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} - \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{8\sqrt{\pi}}.$$

Nota: las funciones gamma y beta tienen múltiples propiedades muy estudiadas, por su interés, entre otros campos, en cálculo complejo y estadística. Algunas de sus propiedades y valores se pueden encontrar, por ejemplo, en las siguientes páginas web:

<http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html>

<http://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html>

<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/gammaFunction.html>

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

