

# JUEGOS Y PROBABILIDADES

LAURENȚIU MODAN

Department of Mathematics, Faculty of Computer Science  
Academy of Economic Studies, Bucharest

modanl@infocrec.ase.ro, modan\_laurent@yahoo.fr

**Abstract.** We propose an introduction in *Combinatorial Probabilities*, using some problems based on a number of games which are more or less known, in the world of *Mathematics*.

**MR classification:** 05A05, 60A99.

## PRELIMINARES

La *Teoría de la Probabilidad* se introduce generalmente con dificultad en los estudios universitarios y sólo en los cursos superiores, porque requiere el conocimiento de otras muchas ramas de las *Matemáticas*, especialmente las teorías de Integribilidad y de la Medida. Esto es habitual en las Facultades de Matemáticas y no hay problema en que la Teoría de la Probabilidad aparezca en los cursos finales. Por otra parte, en todas las carreras Técnicas, el estudio de las Probabilidades debe hacerse antes, por exigencia de las disciplinas de Física, Química y otras. Por lo tanto, la forma directa de presentar la Teoría de la Probabilidad está relacionada con lo que se considera *clásica o Combinatoria*, en el caso discreto, o utilizando la integral de Stieltjes en el caso continuo. Teniendo en cuenta el hecho de que nuestra vida diaria presenta principalmente fenómenos discretos, que se encuentran en problemas técnicos, económicos o sociales, sostengo la idea de que las probabilidades pueden ser introducidas desde los cursos iniciales de los estudios universitarios, en cuanto los *métodos de recuento* sean conocidos. Por lo tanto, una lección como esta podría ser titulada *Probabilidades Combinatorias*, como el libro de referencia de los grandes matemáticos P. Erdős y A. Rényi.

## IDEAS BÁSICAS

En todo lo que sigue usaremos las nociones clásicas de Combinatoria (ver [9]) y también las de Probabilidad elemental (ver [5], [8]). Para un *suceso aleatorio*  $A$ , su probabilidad es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} \quad (1)$$

Y la probabilidad del *suceso* complementario  $\bar{A}$ , es:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2).$$

La probabilidad de que se produzca el suceso aleatorio  $A$ , si se verifica el suceso aleatorio  $B$ , está dada por el suceso condicional  $A/B$ , siendo

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \quad (3).$$

Recordemos también que mediante el *esquema hipergeométrico* (ver [3]), podemos calcular la probabilidad  $P(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de la extracción, sin reemplazamiento, de  $\mathbf{a}$  bolas blancas y  $\mathbf{b}$  bolas negras, de una urna donde hay inicialmente  $a$  bolas blancas y  $b$  bolas negras:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\binom{a}{\mathbf{a}} \binom{b}{\mathbf{b}}}{\binom{a+b}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}}, a \geq \mathbf{a}, b \geq \mathbf{b} \quad (4).$$

Dos sucesos aleatorios A y B son incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ , de donde:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (5).$$

Si los sucesos A y B son compatibles, es decir si  $A \cap B \neq \emptyset$ , entonces se verifica la relación:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (6).$$

En el caso de  $n$  sucesos compatibles, usaremos la relación de Poincaré, como consecuencia de la fórmula de Inclusión y exclusión::

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \quad (7).$$

Recordemos la noción de *variable aleatoria discreta*. Sea un conjunto finito o numerable  $\Omega$ , el correspondiente *espacio boreliano de probabilidad*  $(\Omega, \mathfrak{K}, P)$  (ver [8]), donde  $\mathfrak{K} \subseteq \Pi(\Omega)$ , y  $P: \mathfrak{K} \rightarrow [0,1]$  es una *función de probabilidad*. Ahora definimos una *variable aleatoria discreta* como una función  $X: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ , donde:

$$X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}, x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j \text{ cuando } I \subseteq \mathbf{I}.$$

Si los sucesos  $A_i$  están dados por:

$$A_i = \{\mathbf{w} \in \Omega \mid X(\mathbf{w}) = x_i\}, (\forall) i \in I,$$

Entonces sus probabilidades son:

$$p_i = P(A_i) = P(\{\mathbf{w} \in \Omega \mid X(\mathbf{w}) = x_i\}), (\forall) i \in I \quad (8).$$

Así, la *variable aleatoria discreta* se denotará por:

$$X: \left\{ \begin{matrix} x_i \\ p_i \end{matrix} \right\}, p_i \geq 0, (\forall) i \in I, \text{ cuando } \sum_{i \in I} p_i = 1 \quad (9).$$

Su *esperanza matemática*  $E(X)$  se define como:

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i \quad (10).$$

## LOS PRINCIPALES ARGUMENTOS, POR MEDIO DE PROBLEMAS

Los comienzos de la *Teoría de la Probabilidad* están relacionados con los juegos y datan de hace más de cuatro siglos y medio. Así, en la frontera entre la primera y segunda mitad del siglo XVI, Cardano escribió „*El libro sobre el juego de dados*” („*Liber de Ludo Aleae*”), aunque su publicación se produjo un siglo más tarde, hacia el año 1663. De hecho, este es el período en el que los problemas planteados por juegos fueron presentados a matemáticos importantes de la época para ser resueltos, y que son considerados los precursores de la *Teoría de la Probabilidad*. Entre quienes analizaron los juegos mediante las matemáticas podemos citar a Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, Laplace. En particular, Laplace fué el primero que observó: „Es notable que una rama de la ciencia que empezó analizando juegos se haya convertido en el método más importante del conocimiento humano.”

En lo que sigue, intentaremos probar que usando diferentes juegos (dados, cartas, Lotería, etc), que tienen un *dominio discreto*, se puede introducir la probabilidad combinatoria de una manera natural. Seguramente deberemos empezar por presentar el primer problema de probabilidad planteado a Pascal en 1654 por el caballero francés De Méré.

**Problema 1.** (De *Méré & Pascal*). Un jugador y la banca quieren hacer apuestas equitativas. Estudiar las probabilidades de ganar, si el jugador quiere obtener:

- i) al menos un 6, en 4 lanzamientos de un dado;
- ii) al menos dos seises, en 24 lanzamientos con 2 dados.

**Solucion.** i) Consideremos el suceso:

$$A_1 = \{\text{no aparición de un 6 en 4 lanzamientos}\}.$$

Debemos calcular  $P(\overline{A_1})$ . Observemos en primer lugar que el número de casos posibles es el cardinal del conjunto

$$M_1 = \{f | f : \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

Donde  $f$  está definida en el conjunto de los 4 lanzamientos y con valores en las caras del dado.

Obviamente,  $|M_1| = 6^4$ .

Para el número de casos favorables, eliminando la cara 6, debemos calcular el cardinal del conjunto:

$$M_2 = \{g | g : \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}\},$$

Que es  $|M_2| = 5^4$ . Por lo tanto:

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0,518.$$

ii) Sea el suceso:

$$A_2 = \{\text{no aparición de un doble 6 en 24 lanzamientos}\}$$

Debemos calcular  $P(\overline{A_2})$ . Para ello, cuando se lanzan 2 dados, observemos que sus valores están dados por

$$\{(1,1), \dots, (1,6), \dots, (6,6)\} = \{1, 2, \dots, 36\}.$$

De aquí que el número de casos posibles es el cardinal del conjunto

$$M_3 = \{u | u : \{t_1, t_2, \dots, t_{24}\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 36\}\},$$

Y resulta ser  $|M_3| = 36^{24}$ .

Para los casos favorables, eliminando el 6 doble, debemos calcular el cardinal del conjunto:

$$M_4 = \{v | v : \{t_1, t_2, \dots, t_{24}\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 35\}\},$$

Es decir,  $|M_4| = 35^{24}$ . Entonces se tiene:

$$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0,492.$$

**Observación 1.** La situación *i)* del *Problema 1* es favorable al jugador, mientras que *ii)* es favorable a la banca.

**Problema 2.** (De *Méré & Pascal, Problema de las partidas*). Dos personas igualmente hábiles toman parte en un juego a varias partidas, en las que el ganador obtiene 1 punto si gana. El primero que consiga 3 puntos gana el juego. Por razones imprevistas han de suspender el juego cuando el marcador señala 2-1. ¿Cómo deben repartirse las apuestas entre los dos jugadores?

**Solución.** El reparto ha de hacerse proporcionalmente a la probabilidad de ganar de cada jugador, si el juego continuase. Para ello, observemos que el ganador se decide en a lo sumo 2 partidas. Supongamos que el primer jugador,  $I$ , está en ventaja por 2-1. En las dos hipotéticas partidas se tienen las siguientes situaciones 4 situaciones igualmente posibles:

$$(I, I), (I, II), (II, I), (II, II).$$

En cada una de ellas, la primera y respectivamente la segunda posiciones muestra al ganador en la primera, respectivamente la segunda partida. Por lo tanto,  $I$  tiene 3 situaciones favorables y  $II$  tiene sólo una de ser declarado ganador. Luego el reparto de las apuestas es:

$$P(I) = 3/4 = 0,75; P(II) = 1/4 = 0,25.$$

**Observación 2.** Es muy importante observar que el reparto no es proporcional al resultado, sino a la probabilidad de ganar en el supuesto de que el juego continuase normalmente.

**Problema 3.** (L. Modan, ver [2]). Una baraja tiene 53 cartas, de las que 13 son comodines(jokers). La baraja se utiliza en un juego con 6 jugadores y en el que hay un comodín a la vista sobre el tapete. Calcular la probabilidad de que al menos un jugador tenga un comodín.

**Solución.** Los 6 jugadores pueden tener entre sus cartas 1, 2, ..., ó 6 comodines. Usando el esquema hipergeométrico (4), y teniendo en cuenta que 6 cartas, de 52, se pueden elegir de  $\binom{52}{6}$  maneras, se obtiene la siguiente probabilidad:

$$P = \sum_{k=1}^6 \frac{\binom{12}{k} \binom{40}{6-k}}{\binom{52}{6}} \cong 0,791.$$

**Problema 4.** (L. Modan, ver [1]). De una urna donde hay 10 bolas numeradas del 0 al 9 se extraen, con reemplazamiento, 7 bolas, para obtener un número inicial de 7 cifras. Los jugadores usan números de 7 cifras, elegidos aleatoriamente. Ganan si obtienen el número inicial, o sus últimas 6 cifras, o sus últimas 5 cifras, ..., o sus últimas 3 cifras. Hallar la probabilidad de ganar de un jugador que solamente utiliza un número.

**Solución.** Para todo  $i \in \{3, \dots, 7\}$ , consideremos los sucesos:

$$A_i = \{\text{aparición de las últimas } i \text{ cifras del número extraído}\}.$$

Observemos que  $A_i, (\forall i \in \{3, \dots, 7\})$  son incompatibles, porque la aparición de  $i$  cifras buenas impone una ganancia que es diferente de la de la situación con  $i-1$  cifras buenas. Entonces, por (5), la probabilidad de ganar de un jugador es:

$$P(A_3 \cup \dots \cup A_7) = \sum_{k=3}^7 P(A_k) \quad (11).$$

Pero observemos que en el sistema decimal, el cardinal del conjunto de números de  $i$  dígitos es del conjunto:

$$M = \{f | f : \{1, \dots, i\} \rightarrow \{0, \dots, 9\}\}.$$

Ya que  $|M| = 10^i$ , tenemos:

$$P(A_i) = 1/10^i, (\forall i \in \{3, \dots, 7\}),$$

Y así sucesivamente, así que, por (11), se tiene:

$$P(A_3 \cup \dots \cup A_7) = \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10^3} \cdot \frac{1-1/10^5}{1-1/10} = 0,0011.$$

**Observación 3.** El Problema 4 es el modelo matemático del juego NOROC (SUERTE) de la Corporación Autónoma de Loterías Rumanas.

**Problema 5.** (enunciado parcial del Problema III, pg. 22, de [6]). Una urna U contiene 4 bolas negras (b) y 2 bolas blancas (w). La urna pertenece a una banca que propone el siguiente juego a las personas interesadas. El jugador extrae simultáneamente y sin reemplazamiento, 2 bolas de U. Caben las siguientes situaciones:

- si las bolas son negras, el jugador gana  $a > 0$  euros y el juego termina;
- si las bolas son blancas, el jugador pierde  $6a$  euros y el juego termina;
- si las bolas son de colores distintos, el jugador extrae, sin reemplazamiento, otras dos bolas, y:
  - si ambas son negras, gana  $b > 0$  euros, y el juego termina;

- si las bolas no son negras, pierde 3 euros, y el juego termina.

Sea  $G$  la variable aleatoria que describe las ganancias del jugador.

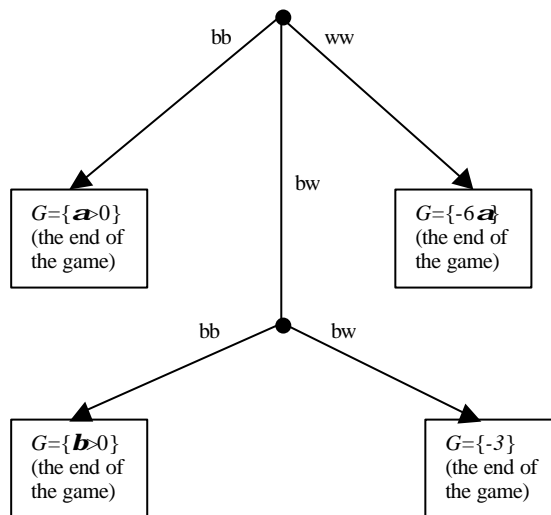
i) Describir el grafo (árbol) correspondiente a las diferentes ganancias.

ii) Calcular la probabilidad  $q$  de que se extraigan 2 bolas negras la segunda vez, suponiendo que en la primera han salido 2 bolas de distinto color.

iii) Calcular la probabilidad  $P(\{G = \mathbf{b}\})$  de ganar  $\mathbf{b}$  euros.

iv) Hallar la ley de probabilidad de la variable aleatoria  $G$  y calcular  $\mathbf{b}$ , para que el juego sea equitativo.

**Solución.** i) El grafo correspondiente a la variable aleatoria  $G$  es el siguiente:



ii) Después de la primera extracción, sin reemplazamiento, en la urna hay 4 bolas, de las que 3 son negras y una blanca. En la segunda extracción, 2 bolas negras pueden ser elegidas de  $\binom{3}{2}$  maneras,

mientras que dos bolas distintas, de 4, pueden ser elegidas de  $\binom{4}{2}$  maneras. Luego por (1), tenemos:

$$q = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

iii) Sean  $A$  y  $B$  los sucesos siguientes:

$A = \{\text{obtener 2 bolas de colores distintos en la primera extracción}\},$

$B = \{\text{obtener 2 bolas negras en la segunda extracción}\}.$

Entonces, la probabilidad de ganar  $\mathbf{b}$  euros, por (3), es:

$$P(\{G = \mathbf{b}\}) = P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = q \cdot P(A) \quad (12).$$

Por (1), tenemos:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \binom{2}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{4 \cdot 2}{15} = \frac{8}{15} \quad (13).$$

Ahora, de (12) y (13), resulta:

$$P(\{G = \mathbf{b}\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

iv) Por (1), tenemos de nuevo:

$$P(\{G = \mathbf{a}\}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{2}{5}, \quad P(\{G = -6\mathbf{a}\}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15},$$

$$P(\{G = -3\}) = 1 - P(\{G = \mathbf{a}\}) - P(\{G = \mathbf{b}\}) - P(\{G = -6\mathbf{a}\}) = 1 - (2/15 + 8/15 + 1/15) = 4/15.$$

Por lo tanto, la ley de probabilidad, o distribución de G, es la siguiente:

$$G: \begin{pmatrix} -6\mathbf{a} & -3 & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 1/15 & 4/15 & 6/15 & 4/15 \end{pmatrix}.$$

Recordemos que un juego es equitativo cuando la esperanza matemática E de su variable aleatoria asociada es 0. Así, en nuestro caso, debemos imponer que  $E(G) = 0$ . Usando (10), tenemos:

$$E(G) = \frac{1}{15}(-6\mathbf{a} - 12 + 6\mathbf{a} + 4\mathbf{b}) = \frac{4(\mathbf{b} - 3)}{15}.$$

Por lo tanto, podemos concluir que la condición de juego equitativo se obtiene para  $\mathbf{b} = 3$ .

**Problema 6.** (L. Modan, ver [7]). Sea M un conjunto numerable de parejas de amigos (chico y chica) que participan en una competición de danza. Las chicas y los chicos están en 2 habitaciones separadas. En cada turno, ante el jurado bailan en pareja un chico y una chica, elegidos aleatoriamente, por lo que puede ser que no se conozcan. Calcular la probabilidad de que, al menos, una de las parejas de baile sea una de las parejas de amigos, y probar que esta probabilidad es menor que 1/2.

**Solución.** Para todo  $i \in \mathbf{N}^*$ , consideremos los sucesos siguientes:

$$A_i = \{\text{la pareja inicial } i \text{ danza frente al jurado}\}.$$

De esta forma, la probabilidad pedida es:

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}^*} A_i\right) \tag{14}.$$

Primero calcularemos  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$  usando (7). Por(1), observemos que:

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, \quad (\forall) i \in \mathbf{N}^*,$$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n}, \quad (\forall) i \neq j, \text{ from } \mathbf{N}^*,$$

.....

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \frac{1}{n!}.$$

Estas relaciones nos permiten calcular:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \\ &= \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} - \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \quad (15).$$

En el límite, en (15), y usando de [4], la serie:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{e},$$

Encontramos, por (14),

$$P\left(\bigcup_{i \in \mathbf{N}^*} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}.$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Modan L.** „Proposed problem” (in Romanian), *Gazeta Matematică pentru tineri*, v. 100, nr.9, Bucharest, 1995;
- [2] **Modan L.** „Proposed problem” (in Spanish), *Revista Escolar de la Oli. Iberoamer. de Mat.*, v.2, nr.8, Valladolid, 2002;
- [3] **Modan L.** „Sur un problème de numération”, *Luc. Sem. de Creat. Mat.*, v.11, Baia Mare, 2002, pg. 95-9;
- [4] **Modan L.** „Real Differential Calculus” (in Romanian), Cison Printing House, Bucharest, 2002;
- [5] **Modan L.** „On the negation of the predicates with, applications in Combinatorial Probabilities”, *Proceedings of the International Conference „The Decidable and the Undecidable in Mathematics Ed.”*, Brno, Czech Republic, Sept. 19-25, 2003, pg. 189-92;
- [6] **Modan L.** „Mathematics Problems” (in Romanian), Gil Printing House, Bucharest, 2003;  
**Csinta Th.**
- [7] **Modan L.** „Proposed problem”, *Octogon, Math. Mag.*, v.12, nr.2, Bra°ov, 2004;
- [8] **Neveu J.** „Bases mathématiques du Calcul des Probabilités”, Masson, Paris, 1964;
- [9] **Tomescu I.** „Introduction in Combinatorics” (in Romanian), Tehnica Printing House, Bucharest, 1972.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

