

Problema 97 (Solución al problema propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España).

Sean x, y, z tres números complejos no nulos y n un entero.

Demostrar que

$$(xyz)^{-(1/3)} \begin{vmatrix} y + n^3 z & n(z-y) & n^2(y-z) \\ n^2(z-x) & z + n^3 x & n(x-z) \\ n(y-x) & n^2(x-y) & x + n^3 y \end{vmatrix}^{1/3}$$

es un número entero y determinar su valor.

Solución: Notemos E la expresión dada. El cambio de variables $(y/z, z/x, x/y) = (a, b, c)$, válido porque $xyz \neq 0$, da la relación $abc = 1$ y convierte E en

$$\begin{vmatrix} n^3 + a & n(1-a) & -n^2(1-a) \\ -n^2(1-b) & n^3 + b & n(1-b) \\ n(1-c) & -n^2(1-c) & n^3 + c \end{vmatrix}^{1/3}$$

Además, se ve que E^3 puede ser considerado como una forma polinomial en n , de grado 9 y a coeficientes complejos $a_i = a_i(x,y,z)$, $i = 0, 1, 2, \dots, 9$, de los cuales es evidente que $a_0 = a_9 = 1$ y suficientemente claro a la vista que $a_i = 0$ para $i = 1, 2, 4, 5, 7, 8$ porque no hay términos en n^i para estos últimos índices. Se tiene pues $E^3 = n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$.

Un cálculo directo da $a_6 = \sum c_i c_j$ con $i+j = 6$ donde c_k designa al coeficiente de n^k en el determinante E^3 y similarmente $a_3 = \sum c_i c_j$ con $i+j = 3$. Así,

$$a_6 = b + c + a + (1-c)(1-b) - (1-a)(b-1) - b(1-a)(c-1) = 2 + abc = 3.$$

Del mismo modo se obtiene $a_3 = 2abc + 1 = 3$. Entonces, en efecto, ambos coeficientes complejos son independientes de x, y, z por lo cual se concluye que $E = n^3 + 1$.

Dos "soluciones" (las comillas indican error)

"Solución" 1.- Una vez obtenido $E^3 = n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$, para que E sea un entero se debe tener $E = n^3 + a n^2 + b n + 1$, con a y b enteros y una condición necesaria y suficiente para que esta expresión de E elevada al cubo sea igual a $n^9 + a_6 n^6 + a_3 n^3 + 1$ es que $a = b = 0$ como se ve fácilmente en $[n^2(n+a) + (bn+1)]^3$ haciendo $a_8 = 0 = 3a$ y $a_1 = 0 = 3b$. Entonces $a_3 = a_6 = 3$ por lo cual $E = n^3 + 1$.

"Solución" 2.- Haciendo $x = y = z$ arbitrarios, se tiene evidentemente $E = n^3 + 1$ sobre toda la diagonal compleja de \mathbf{C}^3 . Como E es un polinomio y es igual a $n^3 + 1$ para una infinidad de valores de n , se tiene $E = n^3 + 1$ en general.

Luis Gómez Sánchez A.
Universidad de Oriente, Venezuela.
Correo electrónico: lagsa7@hotmail.com
Dirección postal: Jirón A. Tovar 267.
La Punta.
01 Callao. PERÚ.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

