

Problema 101 * (propuesto por Abderrahim Ouardini, Burdeos, Francia)

Se considera un triángulo ABC cuyos lados están ordenados de la manera siguiente:

$$AB \leq AC \leq BC$$

Sea I el centro de su círculo inscrito, y T el punto de tangencia del círculo inscrito con el lado AC . El círculo circunscrito al triángulo AIC vuelve a cortar a la recta IT en J .

Demostrar la equivalencia de las dos proposiciones siguientes:

i) La altura desde B (en el triángulo ABC) es igual a TJ .

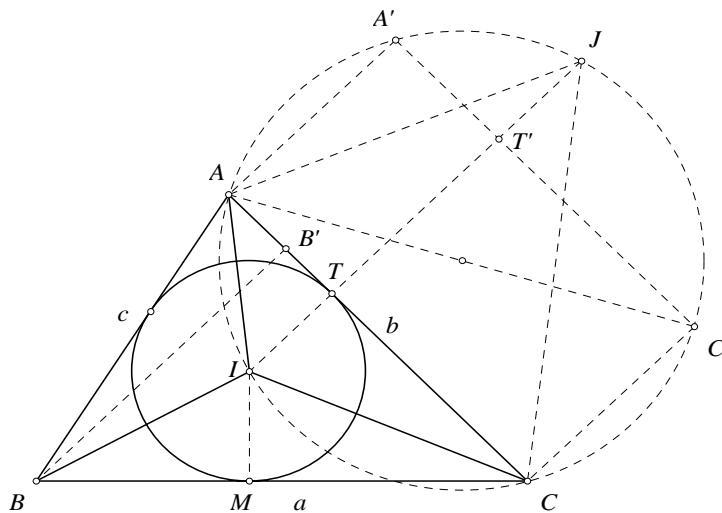
ii) AB, AC y BC están en progresión aritmética.

Solución:

Pongamos como es habitual a, b, c para los lados opuestos a A, B , y C respectivamente, r para el inradio, p para el semiperímetro y $[XYZ]$ el área del triángulo de vértices X, Y, Z .

Con esta notación la proposición i) puede formularse $BB' = TJ$ o bien $[ABC] = [ACJ]$ y la proposición ii) puede formularse de modo equivalente como $2p = 3b$.

Tenemos que probar $BB' = TJ \Leftrightarrow 2p = 3b$.



Primero vamos a calcular TJ en función de elementos del triángulo ABC .

Claramente se tiene $\angle ACJ = 90^\circ - \frac{A}{2}$, $\angle CAJ = 90^\circ - \frac{C}{2}$

Trazamos las perpendiculares a AC por A y C que cortan de nuevo al circuncírculo en A' y C' respectivamente determinando el rectángulo $ACA'C'$ inscrito.

Entonces

$$\angle AC' = \angle CAJ - \angle A'AJ = 90^\circ - \frac{C}{2} - \angle A'AJ = 90^\circ - \frac{C}{2} - \frac{A}{2} = \frac{B}{2}.$$

Como los triángulos IBM y $C'AC$ son semejantes:

$$\frac{C'C}{AC} = \frac{r}{AM} \Leftrightarrow CC' = r \frac{AC}{p-b},$$

y de ahí que

$$TJ = TT' + T'J = CC' + r = r \frac{b}{p-b} + r = r \left(\frac{b}{p-b} + 1 \right) = \frac{pr}{p-b}$$

pero $pr = \frac{1}{2}b \cdot BB'$ (ambas expresiones son el área de ABC) y nos queda finalmente

$$TJ = \frac{b \cdot BB'}{2(p-r)}$$

Supongamos ahora que se cumple i), es decir $BB' = TJ$; entonces la expresión anterior queda

$$\frac{b}{2(p-b)} = 1 \Leftrightarrow 2p - 2b = b \Leftrightarrow b = \frac{2p}{3}$$

y queda probada la equivalencia de ambas proposiciones.

Nota.. Como la proposición ii) es claramente invariante por semejanza, los triángulos cuyos lados estén en progresión aritmética tienen que poder ser caracterizados en términos de sus ángulos.

En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} TJ = AJ \cos \frac{C}{2} \\ TJ = BB' = a \operatorname{sen} C = 2a \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow AJ = 2a \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

de modo análogo $CJ = 2c \operatorname{sen} \frac{A}{2}$ y el área de ACJ vale

$$[ACJ] = \frac{1}{2} AJ \cdot CJ \cdot \operatorname{sen} \left(90 - \frac{B}{2} \right) = 2ac \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}$$

por otra parte

$$[ABC] = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} B = ac \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

igualando ambas áreas obtenemos la relación buscada en función sólo de los ángulos

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Podría enunciarse como un nuevo problema:

Dado un triángulo ABC con $AB \leq AC \leq BC$ probar que los lados están en progresión aritmética si y sólo si

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} = 2 \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoid/>

Edita:

