

Problema 102.

(propuesto por Doru Popescu Anastasiu y Miguel Amengual Covas, Mallorca, España)

Sea  $ABC$  un triángulo y  $D$  un punto sobre  $BC$ . Probar que la relación

$$AD^2 = AB \cdot AC \quad (1)$$

no puede verificarse si  $AD$  es altura o bisectriz interior.

Si  $AD$  es mediana, probar que existen infinitos triángulos que cumplen (1).

(\*) ¿Para qué triángulos  $ABC$  y para qué puntos  $D$  pertenecientes a  $BC$  se verifica (1)?

Solución. (pondremos como habitual  $a, b, c$  para los lados opuestos a  $A, B$  y  $C$  respectivamente).

Si  $AD$  es la altura, obviamente  $AD \leq AB$  y  $AD \leq AC$  y por tanto  $AD^2 \leq AB \cdot AC$  excepto si fueran válidas las dos igualdades simultáneamente y en ese caso el segundo miembro es nulo sin serlo el primero.

Si  $AD$  es la bisectriz interior, es sabido que  $AD^2 = bc \left( 1 - \left( \frac{a}{b+c} \right)^2 \right)$ ; y siendo  $a \leq b+c$  resulta

$$AD^2 \leq bc,$$

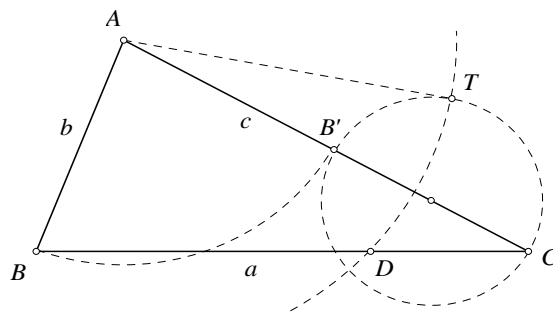
valiendo la igualdad cuando  $a = b+c$  y en ese caso  $AD = 0$  mientras que  $b \cdot c \neq 0$ , luego nunca es válida la igualdad (1).

Si  $AD$  es la mediana sabemos que  $AD^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$  y la igualdad (1) queda

$$\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = bc \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = (b-c)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}(b-c)$$

y esta última relación la cumple cualquier triángulos no isósceles.

Para la última cuestión vamos a construir el punto  $D$  con regla y compás a partir de una triángulo  $ABC$  dado.



Supongamos que  $b < c$ , entonces la circunferencia de centro  $A$  y radio  $b$  corta a  $AC$  en  $B'$ .

La tangente desde  $A$  a la circunferencia de diámetro  $B'C$  determina  $T$  de modo que  $AT^2 = AB \cdot AC$ .

Sólo queda buscar la intersección con  $BC$  de la circunferencia de centro  $A$  y radio  $AT$ .

Como  $b < \sqrt{bc} < c$  queda garantizada la existencia de  $D$ .

Si  $b = c$ , la circunferencia de diámetro  $B'C$  se reduce a un punto y  $T = C$  de modo que (1) se verifica para  $D = B$  o  $D = C$  de modo trivial.

Si consideramos el lado  $BC$  como un segmento cerrado todos los triángulos admiten un punto  $D$  perteneciente a  $BC$  que verifica (1).

Si  $BC$  es un segmento abierto hay que excluir los triángulos que cumplan  $b = c$ .

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

