

Problema 103. Propuesto por José Luis Díaz Barrero. Barcelona. España. **Solución de J. Álvarez Lobo.**

Sean a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) n números reales mayores o iguales que 1. Pruébese que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right) \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k) \right) \geq 2n^2.$$



La desigualdad se verifica para $n = 2$. En efecto, sean $x = a_1, y = a_2$. Definamos la función

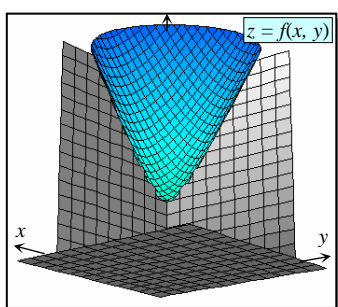
$$f(x, y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) (1+x)(1+y); \quad x, y \in [1, \rightarrow).$$

Obviamente,

$$f(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n=2} \frac{1}{a_k} \right) \left(\prod_{k=1}^{n=2} (1+a_k) \right).$$

Veamos que $f(x, y) \geq 2n^2 = 8$.

Puesto que f es derivable en todo su dominio de definición, los únicos puntos críticos, si existen, son los puntos estacionarios (extremos locales o relativos); utilizaremos el vector gradiente de f para detectar éstos. Se tiene:



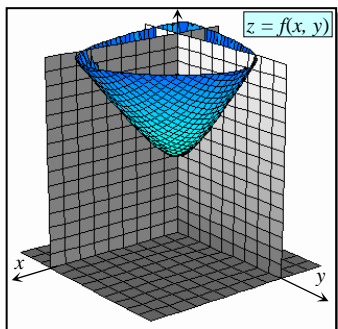
$$\left(\frac{(x^2 - y)(y+1)}{x^2 y}, \frac{(y^2 - x)(x+1)}{x y^2} \right),$$

luego,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Además,

$$f_x(1, 1)f_y(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) = \frac{2(y+1)}{x^3} \cdot \frac{2(x+1)}{y^3} - \left(-\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} \right) \Bigg|_{x=1, y=1} = 12 > 0,$$



por lo que el punto $(1, 1)$ es un mínimo local, que además es un mínimo global (absoluto) pues $(1, 1)$ es un punto frontera, y en ésta es el único punto crítico. En efecto, la frontera de f son las trazas de la superficie $f(x, y)$ sobre los planos $y = 1$ y $x = 1$, es decir las líneas de ecuación

$$f(x, 1) = \left(\frac{1}{x} + 1 \right) (1+x)(1+1) = 2 \left(x + \frac{1}{x} + 2 \right); \quad x \in [1, \rightarrow),$$

$$f(1, y) = \left(1 + \frac{1}{y} \right) (1+1)(1+y) = 2 \left(y + \frac{1}{y} + 2 \right); \quad y \in [1, \rightarrow),$$

y se tiene:

$$f'(x, 1) = 2 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ si } x \in [1, \rightarrow),$$

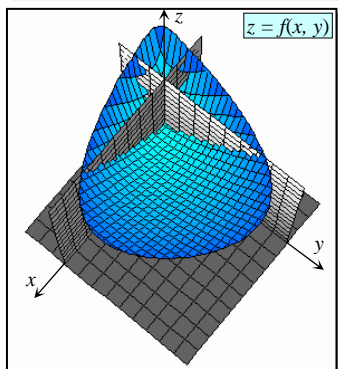
$$f'(1, y) = 2 \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) = 0 \Leftrightarrow y = 1, \text{ si } y \in [1, \rightarrow).$$

En consecuencia,

$$f(x, y) \geq f(1, 1) = 8 = 2n^2, \text{ para } n = 2.$$

Es decir, la desigualdad objeto de demostración se cumple para el primer valor de n para el que ha sido establecida.

Mediante **inducción completa** sobre n probaremos que la desigualdad se verifica para cualquier $n \geq 2$.



Hipótesis de inducción:

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2, \forall a_k \in \mathbf{R} : a_k \geq 1.$$

Se ha de probar, utilizando la hipótesis de inducción, que

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) \geq 2(m+1)^2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) &= \left(\frac{1}{a_{m+1}} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left((1+a_{m+1}) \prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) = \\ &= \frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}} \prod_{k=1}^m (1+a_k) + (1+a_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \stackrel{\textcircled{1}}{\geq} \\ &\geq \prod_{k=1}^m (1+a_k) + 2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \stackrel{\textcircled{2}}{\geq} \\ &\geq \prod_{k=1}^m (1+a_k) + 2 \cdot 2m^2 = 2m^2 + (2m)m + \prod_{k=1}^m (1+a_k) \stackrel{\textcircled{3}}{\geq} \\ &\geq 2m^2 + 4m + \prod_{k=1}^m (1+a_k) \stackrel{\textcircled{4}}{\geq} \\ &\geq 2m^2 + 4m + 2 = 2(m^2 + 2m + 1) = 2(m+1)^2. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{m+1} (1+a_k)\right) \geq 2(m+1)^2,$$

y de aquí que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (1+a_k)\right) \geq 2n^2, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2, \forall a_k \in \mathbf{R} : a_k \geq 1.$$

Observaciones. En la anterior cadena de desigualdades se ha utilizado:

$$\textcircled{1} a_{m+1} \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{1+a_{m+1}}{a_{m+1}} \geq 1, 1+a_{m+1} \geq 2.$$

$$\textcircled{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^m (1+a_k)\right) \geq 2m^2 \text{ (hipótesis de inducción).}$$

$$\textcircled{3} m \geq 2.$$

$$\textcircled{4} a_k \geq 1 \Rightarrow 1+a_k \geq 2, \forall k \in \mathbf{N} : k \geq 2.$$

Generalización. La desigualdad propuesta admite la siguiente generalización (demostración análoga):

$$\square \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (\lambda + a_k)\right) \geq 2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda, a_k \geq 1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

Formas equivalentes. Por simples cambios de variable en la anterior, se deducen las desigualdades:

$$\square \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^n (\lambda - a_k)\right) \leq -2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, a_k \leq -1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

$$\square \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\prod_{k=1}^n \left(\lambda + \frac{1}{a_k}\right)\right) \geq 2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, 0 < a_k \leq 1, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$

$$\square \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\prod_{k=1}^n \left(\lambda - \frac{1}{a_k}\right)\right) \leq -2\lambda n^2, \forall \lambda, a_k \in \mathbf{R} : \lambda \geq 1, -1 \leq a_k < 0, \forall n \in \mathbf{N} : n \geq 2.$$



Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

